Jukka Kangasaho ◦ Jukka Mäkinen ◦ Juha Oikkonen ◦
Johannes Paasonen ◦ Maija Salmela ◦ Jorma Tahvanainen

# Pitkä matematiikka

## Analyyttinen geometria

Sanoma Pro Oy
Helsinki

**Tiedustelut**
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta
ISBN 978-951-0-29159-7 Pitkä Matematiikka 4 Analyyttinen geometria

12 kk lisenssi ISBN 978-952-63-1919-3
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-1920-9

Toimitus: Riitta-Liisa Eerola
Ulkoasu: Veera Alanko
Taitto: Jukka Nieminen
Piirrokset: Picman Oy, Pekka Könönen
Kansi: Timo Jokivartio

© Jukka Kangasaho, Jukka Mäkinen, Juha Oikkonen, Johannes Paasonen,
Maija Salmela, Jorma Tahvanainen ja Sanoma Pro Oy

**Kopiointiehdot**
Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

# Lukijalle

**Pitkä matematiikka**

Useimmat luonnontieteiden ja tekniikan saavutukset perustuvat matematiikan tuloksiin, niin myös yhä enemmän monet yhteiskuntatieteiden ja humanististen tieteiden oivallukset. Pelkän teoreettisen uteliaisuudenkin innoittamana löydetty matemaattinen tieto on usein osoittautunut yllättävän hyödylliseksi. Matematiikassa yhdistyy kiehtovalla tavalla kaksi piirrettä: se on luovan ajattelun ja oivaltamisen leikkiä ja samalla täsmällistä ja loogista.

Pitkä matematiikka -sarjan tavoitteena on, että oppilas matematiikan tietojen ja taitojen lisäksi oppii ymmärtämään matematiikan erityisluonteen tiedonalana, jossa teoreettinen kohtaa käytännöllisen ja jossa luova oivaltaminen kohtaa täsmällisen loogisuuden.

**Eteneminen**

Luvun avaa aihepiiriin johdatteleva ongelma tai esimerkki. Uusi teoreettinen tieto kootaan ja perustellaan, ja lisäesimerkit opastavat tiedon hyväksikäyttöön ja syventämiseen. Esimerkit on laadittu niin, että opiskelijat voivat omaksua ne itsenäisesti. Siten tuntityöskentelyssä voidaan usein jo aikaisessa vaiheessa siirtyä itsenäiseen harjoitteluun, jolloin opiskelijat etenevät omassa tahdissaan kirjan esimerkkejä hyödyntäen. Näin menetellen kaikki opiskelijat harjaantuvat perustaidoissa, ja samalla nopeammin etenevillä on mahdollisuus tietojen ja taitojen syventämiseen. Kun opiskelijat ohjataan käyttämään hyväkseen kirjan esimerkkejä ja teoriaosuuksia, tarve vihkomuistiinpanojen tekemiseen oppitunnilla vähenee ja opiskelijat voivat paremmin keskittyä opetukseen.

**Harjoittelu**

Lukujen harjoitukset ovat kahtena sarjana.

Sarja I sisältää perustehtäviä, jotka harjoittavat uusia menetelmiä, tukevat teoreettisen tiedon ymmärtämistä ja juurruttamista sekä ohjaavat opitun soveltamiseen. Enimmäkseen tehtävät heijastelevat luvun esimerkkien tilanteita. Sarjaa I voidaan käyttää esimerkiksi oppitunnin aikana tapahtuvaan harjoitteluun.

Sarja II sisältää perustehtävien lisäksi vaativampia tehtäviä, joissa usein on myös matematiikan harrastamiseen innostavaa syventävää tietoa. Sarjasta II voidaan valikoida oppitunnin mittaan havaittujen tarpeiden mukaiset helpommat ja vaativammat kotitehtävät.

Kirjan esimerkit ja teoriaosuudet ovat apuna myös kotitehtävien parissa työskenneltäessä. Kaikkia tarpeellisina pidettyjä tietoja tai sovellustilanteita ei siis tarvitse käsitellä oppitunnin aikana, vaan niihin voidaan perehtyä ratkaistaessa kotitehtäviä kirjan esimerkkien avulla.

**Kertaaminen**

Opiskelijat voivat kerrata koko kurssin kertausluvun avulla. Luvussa käydään ensin läpi kurssin koko sisältö esimerkeillä havainnollistettuna. Sen jälkeen on samojen otsikoiden mukaan järjestettyjä riittävän osaamisen takaavia perustehtäviä. Kertausluvun päättävissä tehtäväsarjoissa on vaativampia tehtäviä koko kurssin alueelta. Kertausluvun tehtävien vastauksissa on, kuten monien tehtävien vastauksissa kautta koko kurssin, ratkaisemista tukevia ohjeita.

**Analyyttinen geometria**

Analyyttisessä geometriassa tutkitaan geometriaa koordinaatistossa. Kuvioihin, kuten suoriin ja ympyröihin, opitaan liittämään niin sanottu pistejoukon yhtälö, jolloin geometrisia ongelmia voidaan ratkaista erilaisilla yhtälöratkaisumenetelmillä. Kurssilla perehdytään myös monipuolisesti lukusuoran ja tason perustaviin geometrisiin käsitteisiin, kuten esimerkiksi itseisarvoon ja etäisyyteen.

Toivotamme mielenkiintoisia ja tuloksellisia työskentelyhetkiä.

Helsingissä 1.4.2005

Tekijät

# Ajankäyttöehdotus

Tässä ajankäyttöehdotuksessa kurssin opiskeluun käytetään 28 oppituntia. Kurssin johdantoluku Koordinaatisto on tarkoitettu herättämään kiinnostusta ja laajentamaan opiskelijoiden matemaattista yleissivistystä. Luvun opiskelu ei ole välttämätöntä, joten sille ei ole annettu ajankäyttöehdotusta.

| Luku | Tuntimäärä |
|---|---|
| Etäisyys lukusuoralla | 1 |
| Itseisarvoyhtälöt ja -epäyhtälöt | 2 |
| Tason suorakulmainen koordinaatisto | 1 |
| Pistejoukon yhtälö | 1 |
| Ympyrän yhtälö | 2 |
| Yhtälö $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ | 2 |
| Suoran kulmakerroin | 1 |
| Kulmakertoimen laskeminen | 1 |
| Suoran yhtälö | 2 |
| Yhtälö $Ax + By + C = 0$ | 2 |
| Lineaarinen yhtälöryhmä | 3 |
| Ympyrän leikkauspisteitä | 2 |
| Suorien kohtisuoruus | 3 |
| Pisteen etäisyys suorasta | 3 |
| Paraabeli | 2 |

# Sisällys


Koordinaatisto . . . . . 7
Etäisyys lukusuoralla . . . . . 11
Itseisarvoyhtälöt ja -epäyhtälöt . . . . . 21
Tason suorakulmainen koordinaatisto . . . . . 28
Pistejoukon yhtälö . . . . . 36
Ympyrän yhtälö . . . . . 41
Yhtälö $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ . . . . . 48
Suoran kulmakerroin . . . . . 56
Kulmakertoimen laskeminen . . . . . 67
Suoran yhtälö . . . . . 73
Yhtälö $Ax + By + C = 0$ . . . . . 84
Lineaarinen yhtälöryhmä . . . . . 91
Ympyrän leikkauspisteitä . . . . . 103
Suorien kohtisuoruus . . . . . 110
Pisteen etäisyys suorasta . . . . . 122
Paraabeli . . . . . 132
Kompleksitason yhtälöitä . . . . . 140
Ellipsi ja hyperbeli . . . . . 146

Kertaus . . . . . 151
Kertaustehtäviä . . . . . 170
Tehtäväsarjoja . . . . . 174
Tehtävien vastaukset . . . . . 177
Hakemisto . . . . . 212

# Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003 (ote)

## Matematiikan pitkä oppimäärä

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tehtävänä on antaa opiskelijalle matemaattiset valmiudet, joita tarvitaan ammatillisissa opinnoissa ja korkeakouluopinnoissa. Pitkän matematiikan opinnoissa opiskelijalla on tilaisuus omaksua matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta. Opetus pyrkii myös antamaan opiskelijalle selkeän käsityksen matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä sekä sen soveltamismahdollisuuksista arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa.

### *Opetuksen tavoitteet*

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija

- tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn ja oppii sitä kautta luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa
- rohkaistuu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin
- ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä
- oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena
- kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan
- harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä
- harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita
- osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.

## 4. Analyyttinen geometria (MAA4)

### *Tavoitteet*

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- ymmärtää, kuinka analyyttinen geometria luo yhteyksiä geometristen ja algebrallisten käsitteiden välille
- ymmärtää pistejoukon yhtälön käsitteen ja oppii tutkimaan yhtälöiden avulla pisteitä, suoria, ympyröitä ja paraabeleja
- syventää itseisarvokäsitteen ymmärtämystään ja oppii ratkaisemaan sellaisia itseisarvoyhtälöitä ja vastaavia epäyhtälöitä, jotka ovat tyyppiä $|f(x)| = a$ tai $|f(x)| = |g(x)|$
- vahvistaa yhtälöryhmän ratkaisemisen taitojaan

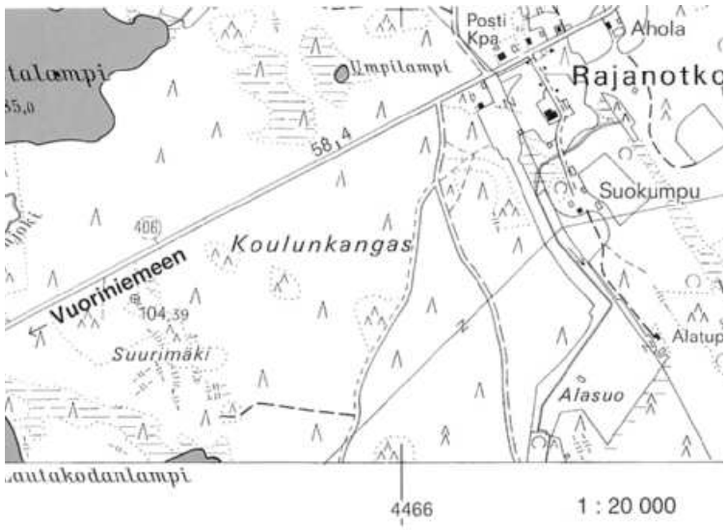
### *Keskeiset sisällöt*

- pistejoukon yhtälö
- suoran, ympyrän ja paraabelin yhtälöt
- itseisarvoyhtälön ja epäyhtälön ratkaiseminen
- yhtälöryhmän ratkaiseminen
- pisteen etäisyys suorasta

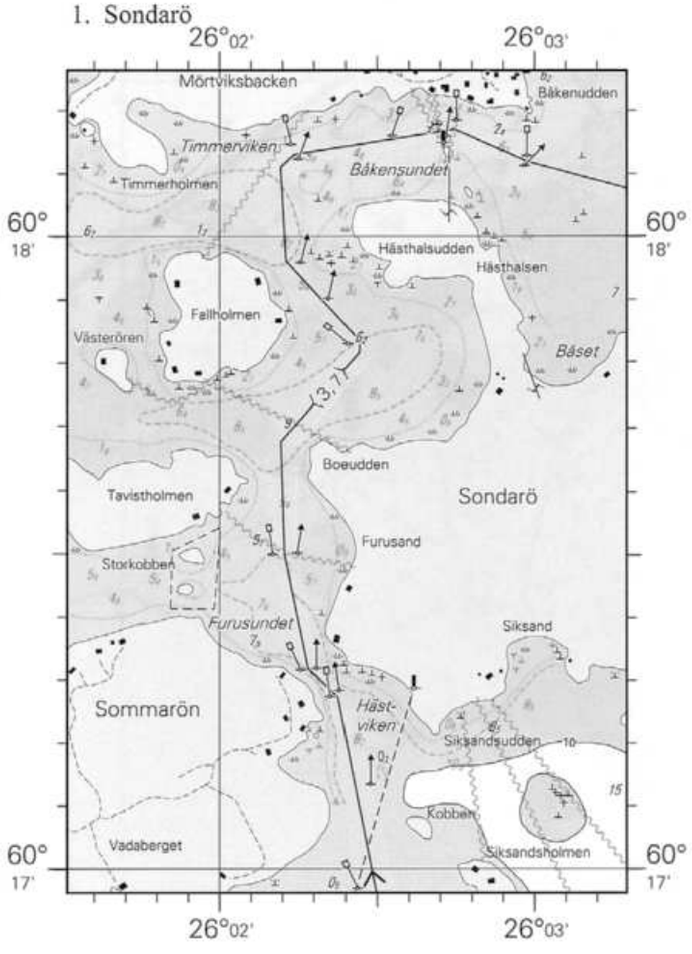
# Koordinaatisto

**Ongelma**

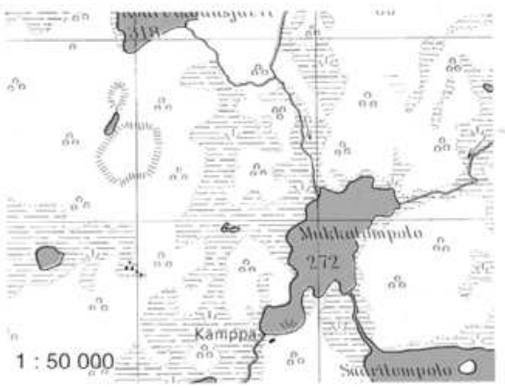
a) Hinausautoon ilmoitetaan, että auto on ojassa paikassa, joka on 800 metriä Rajanotkon kaupalta Vuoriniemeen päin. Etsi auton paikka kartalta.




b) Karille juuttunut purjehtija ilmoittaa olevansa paikassa, jonka koordinaatit veneen GPS-paikantimen mukaan ovat
60°17,15′ P
26°02,52′ I.
Etsi veneen paikka merikartalta.



c) Hätäkeskukseen ilmoitetaan, että loukkaantunut retkeilijä on 1 400 metrin päässä Mukkalompolon kämpältä suunnassa, joka on pohjoissuunnasta 46° länteen. Etsi retkeilijän sijaintipaikka kartalta.



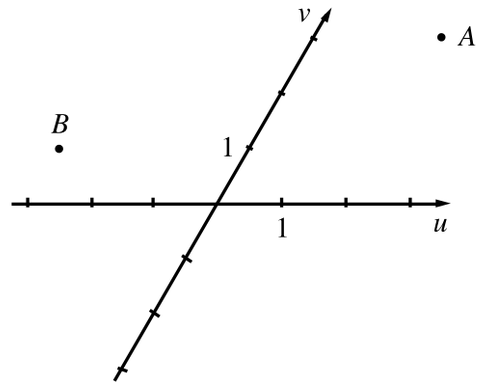

d) Ampiainen on luokkahuoneessa 1,70 metrin korkeudella lattiasta sellaisen kohdan yläpuolella, johon pääsee kulkemalla luokan ovenpuoleisesta etunurkasta 5,70 metriä pitemmän seinän suuntaisesti ja 4,30 metriä lyhyemmän seinän suuntaisesti. Etsi ampiaisen paikka luokkahuoneesta.

1600-luvulla ranskalainen matemaatikko ja filosofi René Descartes otti käyttöön koordinaatiston. Hän oivalsi, että kun kuviot sijoitetaan koordinaatistoon, geometriaa voidaan tutkia algebrallisin, laskennallisin menetelmin. Näin syntyi analyyttiseksi geometriaksi nimitetty matematiikan ala.

Sijainti suoralla voidaan ilmaista yhden luvun eli *koordinaatin* avulla. Siis suora on *yksiulotteinen* avaruus.
Sijainti tasossa voidaan ilmaista kahden koordinaatin avulla. Taso on *kaksiulotteinen* avaruus.
Vastaavasti kolmiulotteisessa avaruudessa paikan ilmaisemiseen tarvitaan kolme koordinaattia. Neliulotteinen avaruus on kyseessä esimerkiksi silloin, kun tapahtuman paikka ilmaistaan kolmella koordinaatilla ja lisäksi ilmaistaan tapahtumahetki aikakoordinaatilla. Nykyään maailmankaikkeutta yritetään selittää muunmuassa ns. säieteorian avulla. Siinä käytetään 10- ja 11-ulotteisia avaruuksia.

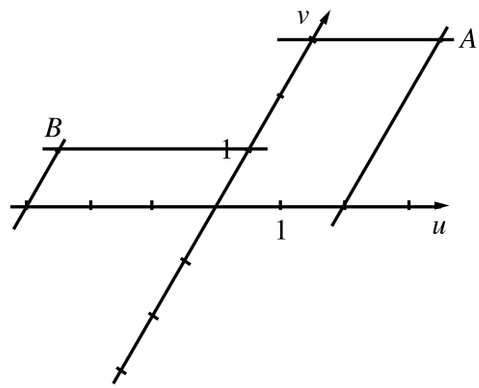
## ESIMERKKI 1

Mitkä ovat pisteiden $A$ ja $B$ koordinaatit tason vinokulmaisessa $uv$-koordinaatistossa?




### Ratkaisu

Pisteen koordinaatit löydetään, kun pisteen kautta piirretään koordinaattiakselien suuntaiset suorat. Koordinaatit luetaan suorien ja koordinaattiakselien leikkauspisteistä.




Pisteen $A$ $u$-koordinaatti on $2$ ja $v$-koordinaatti $3$. Siis $A = (2, 3)$.
Pisteen $B$ $u$-koordinaatti on $-3$ ja $v$-koordinaatti $1$. Siis $B = (-3, 1)$.

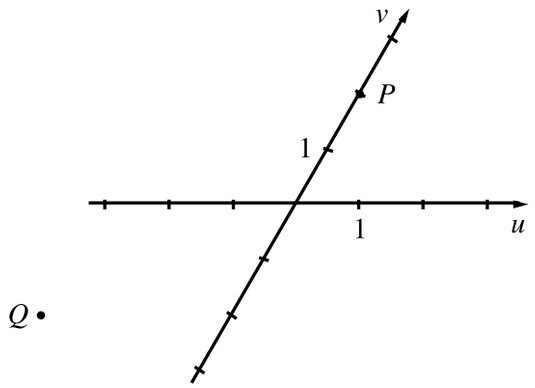
### Vastaus

$A = (2, 3)$, $B = (-3, 1)$

## TEHTÄVIÄ

**1.** Kuinka kohteen sijainti voidaan ilmoittaa ja kuinka monta lukua sijainnin ilmoittamiseen tarvitaan, kun kyseessä on
a) sähkökatkon vuoksi pysähtynyt hissi
b) juoksurataa kiertävä kilpajuoksija
c) merellä oleva luoto
d) kuumailmapallo meren yläpuolella?

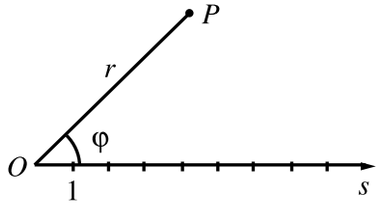
**2.** a) Mitkä ovat pisteiden $P$ ja $Q$ koordinaatit kuvion vinokulmaisessa $uv$-koordinaatistossa?
b) Merkitse koordinaatistoon pisteet $A(-2, 0)$, $B(-1, -1)$ ja $C(0{,}5; -3)$.



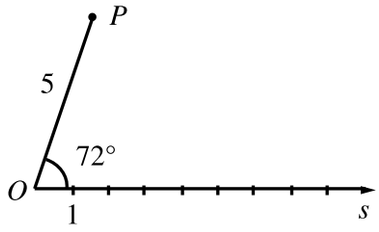

**3.** Tasossa käytetään tavallisesti suorakulmaista koordinaatistoa, jota usein kutsutaan $xy$-koordinaatistoksi. Vene sijaitsee laiturin päästä katsottuna 350 metrin etäisyydellä suunnassa, joka vastapäivään kierrettäessä muodostaa 53°:n kulman pohjoissuunnan kanssa.
a) Ilmoita veneen sijainti $xy$-koordinaatistossa, jonka origona on laiturin pää ja jonka akselit osoittavat itään ja pohjoiseen. Koordinaatiston yksikkö vastaa 100 metriä.
b) Veneen kohdalla 120 metrin syvyydellä on laivan hylky. Ilmoita hylyn sijainti $xyz$-koordinaatistossa, jonka $x$- ja $y$-akselit ovat kuten a-kohdassa ja $z$-akseli osoittaa suoraan ylös. Myös $z$-akselin yksikkö on 100 metriä.

**4.** Edellisen tehtävän laiturilta havaittiin kuumailmapallo, joka näkyi lounaassa 17°:n korkeudella. Pallon alapuolella on kari, jonka etäisyys laiturista on 2,7 km. Ilmoita kuumailmapallon sijainti edellisen tehtävän $xyz$-koordinaatistossa.

**5.** Tason niin sanottu *napakoordinaatisto* muodostetaan merkitsemällä tasoon kiintopiste $O$ (napakoordinaatiston origo) ja piirtämällä pisteestä $O$ alkava puolisuora $s$. Pisteen $P$ *napakoordinaatit* $(r, \varphi)$ ovat pisteen $P$ pisteestä $O$ mitattu etäisyys $r$ ja kulma $\varphi$, jonka jana $OP$ vastapäivään kierrettäessä muodostaa puolisuoran $s$ kanssa.




Esimerkiksi kuvion pisteen $P$ napakordinaatit ovat $(5, 72°)$.



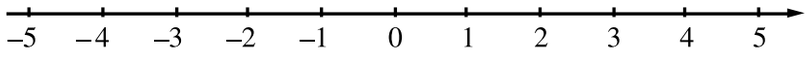

Piirrä napakoordinaatisto ja merkitse siihen pisteet $(2, 0°)$, $(3, 75°)$, $(4, 90°)$, $(5, 120°)$ ja $(6, 225°)$.

**6.** Valitaan napakoordinaatiston origoksi $xy$-koordinaatiston origo ja kiinteäksi puolisuoraksi positiivinen $x$-akseli.
a) Mitkä ovat $xy$-koordinaatiston pisteiden $A(3, 0)$, $B(0, 3)$, $C(-3, 0)$, $D(0, -3)$, $E(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ja $F(-1, -1)$ napakoordinaatit?
b) Mitkä ovat napakoordinaatiston pisteiden $G(5, 0°)$, $H(2, 45°)$, $I(3, 90°)$, $J(3, 135°)$ ja $K(4, 270°)$ koordinaatit $xy$-koordinaatistossa?

# Etäisyys lukusuoralla

**Ongelma 1** Anna esimerkkejä luvuista, joiden etäisyys luvusta nolla lukusuoralla on yhtä suuri kuin a) luku itse b) luvun vastaluku.

Tärkein esimerkki yksiulotteisesta koordinaatistosta on lukusuora.



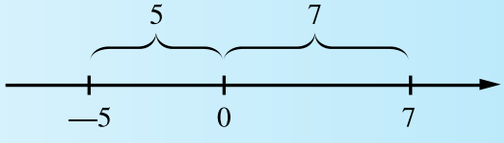

Jokaista lukusuoran pistettä vastaa reaaliluku, ja jokaista reaalilukua vastaa lukusuoran piste.

## Itseisarvon määritelmä

Luvun *itseisarvo* on luvun etäisyys luvusta nolla lukusuoralla.

Luvun $a$ itseisarvo merkitään $|a|$.

Esimerkiksi luvun $7$ itseisarvo on luku $7$ itse eli $|7| = 7$.
Luvun $|-5|$ itseisarvo on luvun $-5$ vastaluku $5$ eli $|-5| = 5$.

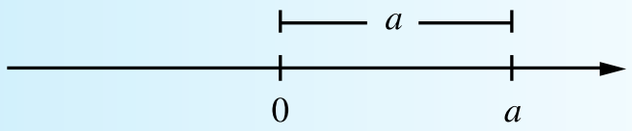


### Itseisarvon määrittäminen

Kun määritetään luvun $a$ itseisarvoa, niin ensin selvitetään, onko luku $a$ positiivinen, negatiivinen vai nolla.

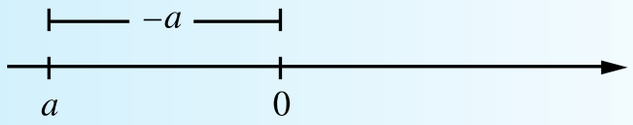
Jos luku $a$ on positiivinen tai nolla (eli epänegatiivinen), luvun $a$ itseisarvo on luku $a$ itse.

Jos $a \geqslant 0$, niin $|a| = a$.




Jos luku $a$ on negatiivinen, luvun $a$ itseisarvo on luvun $a$ vastaluku.

Jos $a < 0$, niin $|a| = -a$.*




Siis

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kun } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{kun } a < 0. \end{cases}$$

**ESIMERKKI 1**

Määritä $|2 - \sqrt{5}\,|$.

**Ratkaisu**

Tutkitaan, onko luku $2 - \sqrt{5}$ positiivinen vai negatiivinen:

$2 - \sqrt{5} \approx -0{,}24 < 0$

Siis

$|2 - \sqrt{5}\,| = -(2 - \sqrt{5}\,)$ Negatiivisen luvun itseisarvo on luvun vastaluku.

$= -2 + \sqrt{5}$

**Vastaus**

$-2 + \sqrt{5} \quad (= \sqrt{5} - 2)$

---

* Tässäkin voisi olla mukana luku nolla eli $a \leqslant 0$, sillä nollan vastaluku on nolla.

## Itseisarvon ominaisuuksia

Seuraava ominaisuus seuraa suoraan itseisarvon määritelmästä.

### Itseisarvojen yhtäsuuruus

Kahden luvun itseisarvot ovat yhtä suuret, jos ja vain jos luvut ovat samat tai toistensa vastaluvut.

$$|a| = |b|, \text{ jos ja vain jos } a = b \text{ tai } a = -b$$

Seuraavat ominaisuudet voidaan perustella käymällä läpi lukujen $a$ ja $b$ eri merkkivaihtoehdot.

### Tulon ja osamäärän itseisarvo

Lukujen tulon itseisarvo on lukujen itseisarvojen tulo.

$$|ab| = |a||b|$$

Lukujen osamäärän itseisarvo on lukujen itseisarvojen osamäärä.

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$$

Ominaisuuksia voidaan käyttää itseisarvolausekkeiden muokkaamiseen.

Esimerkiksi:

$|-a-b| = |a+b|$, sillä luku $a+b$ on luvun $-a-b$ vastaluku.

$|-7a| = |-7||a| = 7|a|$ ja $5|x| = |5x|$

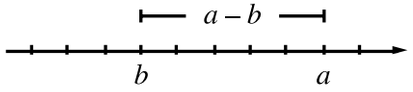
**Ongelma 2** Laske lukujen $a$ ja $b$ etäisyys toisistaan lukusuoralla ja vertaa etäisyyttä erotukseen $a-b$, kun a) $a=9$ ja $b=2$ b) $a=9$ ja $b=13$.

## ESIMERKKI 2

Osoita, että luvun $a$ etäisyys luvusta $b$ on erotuksen $a-b$ itseisarvo $|a-b|$.

**Ratkaisu** Tutkitaan erikseen tapaukset $a>b$, $a<b$ ja $a=b$.

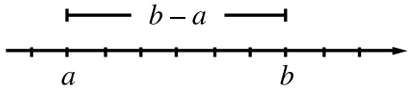
Oletetaan, että $a>b$.




Koska $a>b$, niin luvun $a$ etäisyys luvusta $b$ on erotus $a-b$.
Koska $a>b$, niin erotus $a-b$ on positiivinen, joten $|a-b|=a-b$.

Siis etäisyys on erotuksen itseisarvo.

Oletetaan, että $a<b$.




Koska $a<b$, niin luvun $a$ etäisyys luvusta $b$ on $b-a$.
Koska $a<b$, niin erotus $a-b$ on negatiivinen, joten
$|a-b|=-(a-b)=-a+b=b-a$.

Siis etäisyys on erotuksen itseisarvo.

Jos $a=b$, niin luvun $a$ etäisyys luvusta $b$ on $0$. Samoin on $|a-b|=|0|=0$. Siis etäisyys on erotuksen itseisarvo.

Jokaisessa kolmessa tapauksessa luvun $a$ etäisyys luvusta $b$ on $|a-b|$. □

Edellisessä esimerkissä todistettiin seuraava tulos.

**Kahden luvun etäisyys lukusuoralla**

Lukujen $a$ ja $b$ etäisyys on erotuksen $a-b$ itseisarvo $|a-b|$.

## ESIMERKKI 3

Määritä lukujen etäisyys toisistaan.
a) $-504$ ja $48$ b) $3-\sqrt{3}$ ja $5-2\sqrt{3}$

**Ratkaisu**

a) Lukujen $-504$ ja $48$ etäisyys on

$$|-504-48| = |-552| = 552.$$

Etäisyys on erotuksen itseisarvo.

b) Lukujen $3-\sqrt{3}$ ja $5-2\sqrt{3}$ etäisyys on

$$|(3-\sqrt{3})-(5-2\sqrt{3})| = |3-\sqrt{3}-5+2\sqrt{3}|$$

Etäisyys on erotuksen itseisarvo.

$$= |-2+\sqrt{3}|.$$

Määritetään luvun $-2+\sqrt{3}$ merkki:

$$-2+\sqrt{3} \approx -0{,}3 < 0.$$

Siis kysytty etäisyys on

$$|-2+\sqrt{3}| = -(-2+\sqrt{3})$$

Jos $a < 0$, niin $|a| = -a$.

$$= 2-\sqrt{3}.$$

**Vastaus**

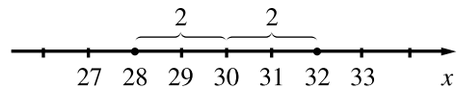
a) 552 b) $2-\sqrt{3}$

## ESIMERKKI 4

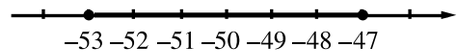
Päättele, mitkä luvut toteuttavat
a) yhtälön $|x - 30| = 2$
b) epäyhtälön $|x + 50| \leqslant 3$.

### Ratkaisu

a) Lauseke $|x - 30|$ ilmaisee luvun $x$ etäisyyden luvusta 30. Yhtälön $|x - 30| = 2$ toteuttavat luvut, joiden etäisyys luvusta 30 on 2. Lukusuoralta nähdään, että luvut ovat 28 ja 32.




b) Lauseke $|x + 50|$ voidaan kirjoittaa muotoon $|x - (-50)|$.
Lauseke ilmaisee luvun $x$ etäisyyden luvusta $-50$.
Epäyhtälön $|x - (-50)| \leqslant 3$ toteuttavat luvut, joiden etäisyys luvusta $-50$ on pienempi tai yhtä suuri kuin 3.




Epäyhtälö toteutuu, kun luku $x$ on välillä $-53 \leqslant x \leqslant -47$ eli välillä $[-53, -47]$.

### Vastaus

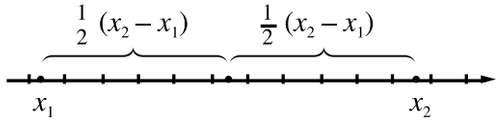
a) 28 ja 32
b) Luvut, jotka ovat välillä $-53 \leqslant x \leqslant -47$ eli välillä $[-53, -47]$.

**Ongelma 3** Mikä on lukusuoran janan keskipiste, jos janan päätepisteet ovat
a) 5 ja 2 b) 57 ja 63?

## ESIMERKKI 5

Lukusuoran janan päätepisteet ovat $x_1$ ja $x_2$. Osoita, että janan keskipiste on päätepisteiden keskiarvo $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

**Ratkaisu** Oletetaan, että $x_1 < x_2$. Tällöin pisteiden $x_1$ ja $x_2$ etäisyys on $x_2 - x_1$. Keskipiste puolittaa pisteitä $x_1$ ja $x_2$ yhdistävän janan,




joten keskipisteen etäisyys pisteestä $x_1$ on $\dfrac{1}{2}(x_2 - x_1)$.

Keskipiste on siis

$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Samaan tulokseen päädytään, jos $x_1 > x_2$. □

Edellisessä esimerkissä todistettiin seuraava tulos.

### Janan keskipiste lukusuoralla

Jos lukusuoran janan päätepisteet ovat $x_1$ ja $x_2$, niin janan keskipiste on $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

Lukusuoran janan keskipiste on siis janan päätepisteiden keskiarvo.

**ESIMERKKI 6**

Lukusuoran janan päätepisteet ovat $4{,}7$ ja $-8{,}9$. Mikä janan keskipiste on?

**Ratkaisu**

Janan keskipiste on

$$\frac{4{,}7 + (-8{,}9)}{2} = \frac{4{,}7 - 8{,}9}{2} \qquad \text{Päätepisteiden } 4{,}7 \text{ ja } -8{,}9 \text{ keskiarvo.}$$

$$= -2{,}1.$$

**Vastaus**

$-2{,}1$

## TEHTÄVIÄ

### SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**7.** Onko luvun itseisarvo luku itse vai luvun vastaluku?

a) $9$ b) $-17$ c) $-\pi^2$

d) $-1+\sqrt{2}$ e) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$

**8.** Merkitse ja määritä luvun itseisarvo.

a) $-7$ b) $\sqrt{10}-3$

c) $-3+\sqrt{7}$

**9.** Määritä luvut, joiden itseisarvo on

a) $3$ b) $\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3}+1$ d) $\sqrt{3}-2$.

**10.** Mikä on lukujen etäisyys toisistaan?

a) $-3{,}76$ ja $7{,}76$

b) $7-u$ ja $7+6u$

**11.** Päättele, mitkä luvut toteuttavat yhtälön.

a) $|x|=10$ b) $|5-x|=4$

c) $|x+3|=4$

**12.** Ilmaise ehto itseisarvoyhtälönä tai -epäyhtälönä. Mitkä luvut toteuttavat ehdon?

a) Luvun $x$ etäisyys luvusta $27$ on $6$.

b) Luvun $x$ etäisyys luvusta $-5$ on pienempi kuin $2$.

c) Luvun $x$ etäisyys luvusta $19$ on suurempi tai yhtä suuri kuin $6$.

**13.** Päättele, mitkä luvut toteuttavat epäyhtälön.

a) $|x|<3$ b) $|x-4|<7$

c) $|x+2|\geqslant 5$

**14.** Mikä janan keskipiste on, kun janan päätepisteet ovat

a) $3$ ja $-4{,}5$ b) $\sqrt{2}+1$ ja $3\sqrt{2}-6$?

**15.** Mikä janan toinen päätepiste on, kun janan

a) toinen päätepiste on $3$ ja keskipiste on $-6{,}8$

b) toinen päätepiste on $1-\sqrt{2}$ ja keskipiste on $\sqrt{2}$ ?

### SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**16.** Merkitse ja määritä luvun itseisarvo.

a) $-\sqrt{3}$ b) $3-\pi$ c) $7-2\pi$

**17.** Määritä luvut, joiden etäisyys origosta on

a) $3$ b) $3+\sqrt{10}$ c) $-3+\sqrt{10}$.

**18.** Millä $a$:n arvoilla luvun $2a+8$ itseisarvo on a) $2a+8$ b) $-2a-8$?

**19.** Mikä janan pituus on, kun janan päätepisteet ovat

a) $-5$ ja $3$ b) $-3\sqrt{5}-1$ ja $-\sqrt{5}+1$

c) $2{,}7-u$ ja $2{,}7+3u$?

**20.** Osoita, että lukujen $a+2b$ ja $6a-3b$ etäisyys on viisi kertaa niin suuri kuin lukujen $a$ ja $b$ etäisyys.

**21.** Päättele, mitkä luvut toteuttavat yhtälön.

a) $|x|=17$ b) $|x-11|=16$

c) $|x+1|=6$

**22.** Päättele, mitkä luvut toteuttavat epäyhtälön.

a) $|x|>5$ b) $|x-9|\leqslant 14$

c) $|x+3|>7$

**23.** Mikä janan keskipiste on, kun janan päätepisteet ovat

a) $-8$ ja $5$ b) $-0{,}999$ ja $-0{,}99$

c) $1\frac{2}{3}$ ja $-2\frac{3}{7}$ ?

**24.** Päättele, mitkä luvut toteuttavat yhtälön.

a) $|x - 6| = |x - 20|$

b) $|x + 23| = |x - 1|$

**25.** Janan päätepisteet ovat $-4$ ja $5$. Piste $X$ jakaa janan osiin, joiden pituuksien suhde päätepisteestä $5$ lukien on $3 : 4$. Määritä piste $X$.

**26.** Janan $AB$ päätepiste $A$ on $2{,}7$. Mikä on janan $AB$ toinen päätepiste $B$, jos piste $-0{,}5$ jakaa janan osiin, joiden pituuksien suhde päätepisteestä $A$ lukien on a) $1 : 4$ b) $4 : 1$?

**27.** Joissakin tilanteissa on mielekästä määritellä lukujen etäisyydeksi muu kuin lukujen erotuksen itseisarvo. Kahden luvun $x$ ja $y$ niin sanottu postietäisyys on lukujen itseisarvojen summa $|x| + |y|$. Laske lukujen a) $7$ ja $5$ b) $8$ ja $-4$ c) $-5$ ja $-5$ postietäisyys. Selitä nimitys postietäisyys. Milloin lukujen postietäisyys on yhtä suuri kuin niiden erotuksen itseisarvo?

**28.** Tutki, millä lukuja $x$ ja $y$ ($x \neq 0$ ja $y \neq 0$) koskevilla ehdoilla yhtäsuuruus pätee.

a) $|x + y| = |x| + |y|$

b) $|x - y| = |x| - |y|$

c) $|x + y| = |x| - |y|$

d) $|x - y| = ||x| - |y||$

# Itseisarvoyhtälöt ja -epäyhtälöt

Itseisarvoyhtälö ja -epäyhtälö voidaan joskus ratkaista suoraan päättelemällä, kun itseisarvolauseke tulkitaan etäisyydeksi. Tässä luvussa perehdytään joidenkin yhtälö- ja epäyhtälötyyppien mekaanisempiin ratkaisumenetelmiin.

## ESIMERKKI 1

Ratkaise yhtälö.

a) $|x| = 4$ b) $|3x + 1| = 4$

**Ratkaisu**

a) $|x| = 4$

Luvut, joiden itseisarvo on 4, ovat 4 ja –4.

$x = 4$ tai $x = -4$

b) $|3x + 1| = 4$

Luvut, joiden itseisarvo on 4, ovat 4 ja –4. Yhtälö toteutuu, kun lausekkeen $3x + 1$ arvo on 4 tai –4.

$3x + 1 = 4$ tai $3x + 1 = -4$ $\quad | -1$ Ratkaistaan molemmat yhtälöt.

$3x = 3$ tai $3x = -5$ $\quad | : 3$

$x = 1$ tai $x = -\frac{5}{3}$

**Vastaus**

a) $x = 4$ tai $x = -4$ b) $x = 1$ tai $x = -\frac{5}{3}$ *

---

* Ratkaisu voidaan tarkistaa graafisella laskimella piirtämällä funktion $|3x + 1| - 4$ kuvaaja ja määrittämällä kuvaajasta funktion nollakohdat. Voidaan myös piirtää kuvaajat $y_1 = |3x + 1|$ ja $y_2 = 4$ ja määrittää kuvaajien leikkauspisteiden $x$-koordinaatit. Itseisarvo on laskimessa abs, joten $|3x + 1|$ syötetään muodossa abs(3x + 1).

Itseisarvoyhtälö $|f(x)| = a$, missä $a \geqslant 0$, toteutuu, jos ja vain jos lausekkeen $f(x)$ arvo on $a$ tai luvun $a$ vastaluku $-a$. Yhtälö voidaan siis purkaa kahdeksi yhtälöksi, jotka ratkaistaan tavallisilla yhtälönratkaisumenetelmillä.

**Yhtälön $|f(x)| = a$, missä $a \geqslant 0$, ratkaiseminen**

$$|f(x)| = a$$
$$f(x) = a \quad \text{tai} \quad f(x) = -a$$

Yhtälö puretaan kahdeksi yhtälöksi.

Ratkaistaan molemmat yhtälöt.

Jos $a < 0$, niin yhtälöllä $|f(x)| = a$ ei ole ratkaisua, sillä luvun itseisarvo on aina epänegatiivinen.

## ESIMERKKI 2

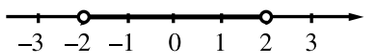
Ratkaise epäyhtälö.
a) $|x| < 2$ b) $|4x - 3| < 2$

**Ratkaisu**

a) $|x| < 2$

Luvut, joiden itseisarvo on pienempi kuin 2, ovat lukusuoralla $-2$:n ja 2:n välissä.

$-2 < x < 2$




Yhtälön ratkaisujoukko voidaan ilmaista myös välin merkinnällä $]-2, 2[$.

b) $|4x - 3| < 2$

Luvut, joiden itseisarvo on pienempi kuin 2, ovat lukusuoralla $-2$:n ja 2:n välissä. Epäyhtälö toteutuu, kun lausekkeen $4x - 3$ arvo on välillä $]-2, 2[$.

$-2 < 4x - 3 < 2$

Ensimmäisen asteen kaksoisepäyhtälö voidaan ratkaista kahdella tavalla.

*Tapa 1.* Puretaan kaksoisepäyhtälö kahdeksi epäyhtälöksi.

$-2 < 4x - 3 < 2$

Lausekkeen $4x - 3$ arvon tulee olla suurempi kuin $-2$ ja pienempi kuin $2$.

$4x - 3 > -2$ ja $4x - 3 < 2$ $\quad | + 3$ Ratkaistaan epäyhtälöt.

$4x > 1$ ja $4x < 5$ $\quad | : 4$ Koska jakaja $4$ on positiivinen, epäyhtälöiden suunta säilyy.

$x > \frac{1}{4}$ ja $x < \frac{5}{4}$

Epäyhtälöt voidaan yhdistää kaksoisepäyhtälöksi.

$\frac{1}{4} < x < \frac{5}{4}$

Ratkaisujoukko voidaan ilmaista myös välin merkinnällä $]\frac{1}{4}, \frac{5}{4}[$.

*Tapa 2.* Sovelletaan ensimmäisen asteen epäyhtälön ratkaisumenetelmää suoraan kaksoisepäyhtälöön.

$-2 < 4x - 3 < 2$ $\quad | + 3$

$1 < 4x < 5$ $\quad | : 4$

Koska jakaja $4$ on positiivinen, epäyhtälöiden suunta säilyy.

$\frac{1}{4} < x < \frac{5}{4}$

Ratkaisujoukko voidaan ilmaista myös välin merkinnällä $]\frac{1}{4}, \frac{5}{4}[$.

**Vastaus**

a) $-2 < x < 2$ (ratkaisuväli $]-2, 2[$)

b) $\frac{1}{4} < x < \frac{5}{4}$ (ratkaisuväli $]\frac{1}{4}, \frac{5}{4}[$)

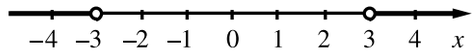
## ESIMERKKI 3

Ratkaise epäyhtälö.
a) $|x| > 3$ b) $|1 - 2x| > 3$

**Ratkaisu**

a) $|x| > 3$

Luvut, joiden itseisarvo on suurempi kuin 3, sijaitsevat lukusuoralla joko $-3$:n vasemmalla puolella tai 3:n oikealla puolella.




$x < -3$ tai $x > 3$

Ratkaisujoukko ei ole väli, joten sitä ei voida kuvata kaksoisepäyhtälöllä tai välin merkinnällä.

b) $|1 - 2x| > 3$

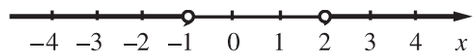
Epäyhtälö $|1 - 2x| > 3$ toteutuu, kun lausekkeen $1 - 2x$ arvo on lukusuoralla joko $-3$:n vasemmalla puolella tai 3:n oikealla puolella.

$1 - 2x < -3$ tai $1 - 2x > 3$ $\quad | -1$ Ratkaistaan molemmat epäyhtälöt.

$-2x < -4$ tai $-2x > 2$ $\quad | : (-2)$ Koska jakaja on negatiivinen, epäyhtälöiden suunta vaihtuu.

$x > 2$ tai $x < -1$

Ratkaisujoukko koostuu kahdesta erillisestä lukusuoran osasta.




$x < -1$ tai $x > 2$

Ratkaisujoukko on helpompi hahmottaa, kun sen osavälit järjestetään pienemmästä suurempaan.

**Vastaus**

a) $x < -3$ tai $x > 3$ b) $x < -1$ tai $x > 2$

Epäyhtälö $|f(x)| < a$, missä $a > 0$, toteutuu, jos ja vain jos lausekkeen $f(x)$ arvo on lukusuoralla lukujen $-a$ ja $a$ välissä.

### Epäyhtälön $|f(x)| < a$, missä $a > 0$, ratkaiseminen

| | |
|---|---|
| $\|f(x)\| < a$ | Epäyhtälö muutetaan kaksoisepäyhtälöksi. |
| $-a < f(x) < a$ | Kaksoisepäyhtälö voidaan purkaa kahdeksi epäyhtälöksi. |
| $f(x) > -a$ ja $f(x) < a$ | Ratkaistaan molemmat epäyhtälöt. |

Epäyhtälö $|f(x)| > a$, missä $a > 0$, toteutuu, jos ja vain jos lausekkeen $f(x)$ arvo on lukusuoralla luvun $-a$ vasemmalla puolella tai luvun $a$ oikealla puolella.

### Epäyhtälön $|f(x)| > a$, missä $a > 0$, ratkaiseminen

| | |
|---|---|
| $\|f(x)\| > a$ | Epäyhtälö muutetaan kahdeksi epäyhtälöksi. |
| $f(x) < -a$ tai $f(x) > a$ | Ratkaistaan molemmat epäyhtälöt. |

**ESIMERKKI 4**

Ratkaise yhtälö $|3x + 4| = |x - 1|$.

**Ratkaisu**

Kahden luvun itseisarvot ovat yhtä suuret, jos ja vain jos luvut ovat yhtä suuret tai toistensa vastaluvut.

$$|3x + 4| = |x - 1| \qquad |a| = |b|, \text{ jos ja vain jos } a = b \text{ tai } a = -b.$$

$$3x + 4 = x - 1 \quad \text{tai} \quad 3x + 4 = -(x - 1)$$

$$3x + 4 = x - 1 \quad \text{tai} \quad 3x + 4 = -x + 1 \qquad \text{Ratkaistaan molemmat yhtälöt.}$$

$$2x = -5 \quad \text{tai} \quad 4x = -3$$

$$x = -\frac{5}{2} \quad \text{tai} \quad x = -\frac{3}{4}$$

**Vastaus**

$x = -\frac{5}{2}$ tai $x = -\frac{3}{4}$

Muotoa $|f(x)| = |g(x)|$ oleva itseisarvoyhtälö voidaan purkaa kahdeksi yhtälöksi.

**Yhtälön $|f(x)| = |g(x)|$ ratkaiseminen**

$$|f(x)| = |g(x)|$$
$$f(x) = g(x) \quad \text{tai} \quad f(x) = -g(x)$$

$|a| = |b|$, jos ja vain jos $a = b$ tai $a = -b$.

Ratkaistaan molemmat yhtälöt.

## TEHTÄVIÄ

### SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**29.** Ratkaise yhtälö.
a) $|x| = 7$ b) $|3x - 5| = 1$
c) $|11 - x| = 14$

**30.** Ratkaise yhtälö.
a) $|6x + 5| - 7 = 0$
b) $4|3x - 1| = 5$

**31.** Ratkaise epäyhtälö.
a) $|x| \leqslant 8$ b) $|12x + 5| < 7$
c) $|7 - 2x| < 3$

**32.** Ratkaise epäyhtälö.
a) $|x + 5| \geqslant 7$ b) $|5 - 2x| > 7$

**33.** Ratkaise yhtälö.
a) $|3x - 1| = |2x - 4|$
b) $|x - 3| = |x + 5|$

**34.** Ratkaise yhtälö $4|x - 2| = 3|x + 2|$.

**35.** Määritä lukusuoran pisteet, joiden etäisyys luvusta $-4$ on kaksi kertaa niin suuri kuin etäisyys origosta.

**36.** Millä lukusuoran luvuilla $x$ on ominaisuus: luvut $3x$ ja $4x$ ovat yhtä etäällä luvusta 2?

**37.** Ratkaise yhtälö $|x^2 + x| = |x^2 - 3|$.

**38.** Ratkaise yhtälö.
a) $\left|\frac{x}{x-2}\right| = 1$ b) $\left|\frac{x}{x-2}\right| = |x|$

### SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**39.** Ratkaise yhtälö.
a) $|7x + 3| = 3$ b) $|1 - 6x| - 3 = 0$

**40.** Ratkaise yhtälö $|x^2 + 3x - 2| = 2$.

**41.** Ratkaise epäyhtälö.
a) $|3x - 1| \leqslant 5$ b) $|7x + 2| > 2$

**42.** Ratkaise epäyhtälö.
a) $4|1 - 3x| > 5$ b) $1 - |5 - 2x| \geqslant 0$

**43.** Ratkaise yhtälö.
a) $|3x + 4| = |x|$ b) $|3x + 4| = 3|x + 4|$

**44.** Määritä lukusuoran pisteet, joiden etäisyys luvusta 1 on kolme kertaa niin suuri kuin etäisyys luvusta 4.

**45.** Erään luvun pisteestä $-1$ mitatun etäisyyden suhde pisteestä 5 mitattuun etäisyyteen on $\frac{2}{3}$. Mikä tämä luku on?

**46.** Ratkaise yhtälö $|x^2 + 5x - 8| = |5x + 8|$.

**47.** Millä lukusuoran luvuilla on ominaisuus: luvun neliön etäisyys pisteestä 9 on yhtä suuri kuin luvun etäisyys pisteestä 3?

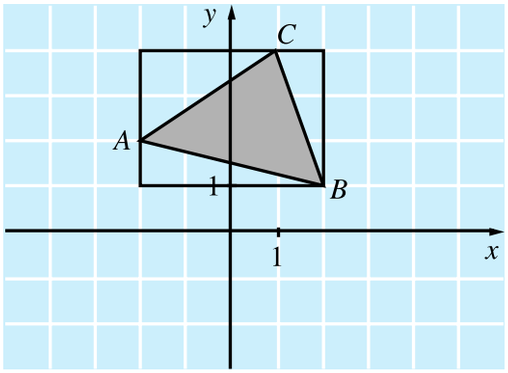
**48.** Millä lukusuoran luvuilla on ominaisuus: luvun neliön etäisyys luvusta 5 on suurempi kuin 4?

**49.** Ratkaise epäyhtälö $|x^2 - x - 6| < 6$.

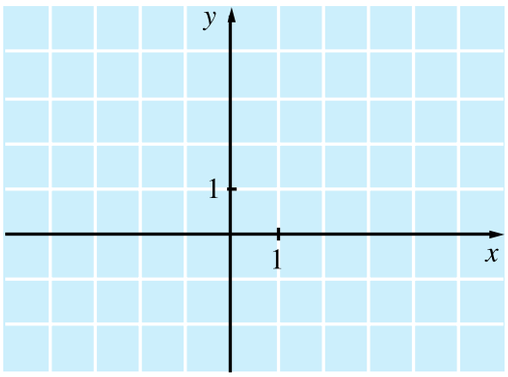
# Tason suorakulmainen koordinaatisto

**Ongelma**

Kolmion kärkipisteet tason suorakulmaisessa koordinaatistossa ovat $A(-2, 2)$, $B(2, 1)$ ja $C(1, 4)$. Käytä hyväksi kolmion ympäri piirrettyä suorakulmiota ja laske kolmion pinta-ala.




Tavallisesti tasossa käytetään suorakulmaista koordinaatistoa. Koordinaattiakselit leikkaavat toisensa kohtisuorasti kummankin nollapisteessä. Leikkauspiste on koordinaatiston *origo*.




Usein vaaka-akselia sanotaan $x$-akseliksi, pystyakselia $y$-akseliksi ja koordinaatistoa $xy$-koordinaatistoksi.

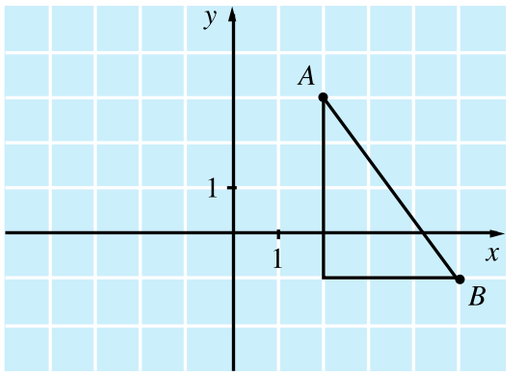
Edellisessä ongelmassa koordinaatiston suorakulmaisuutta käytettiin hyväksi pinta-alan laskemisessa. Myös menetelmä, jolla lasketaan koordinaatiston pisteiden etäisyyksiä, perustuu suorakulmaisuuteen.

## ESIMERKKI 1

Laske pisteiden $A(2, 3)$ ja $B(5, -1)$ etäisyys.

**Ratkaisu**

Kuvioon täydennetään suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Jana $AB$ on kolmion hypotenuusa. Kolmion kateettien pituudet ovat $5 - 2 = 3$ ja $3 - (-1) = 4$.




Janan $AB$ pituus lasketaan Pythagoraan lauseella.

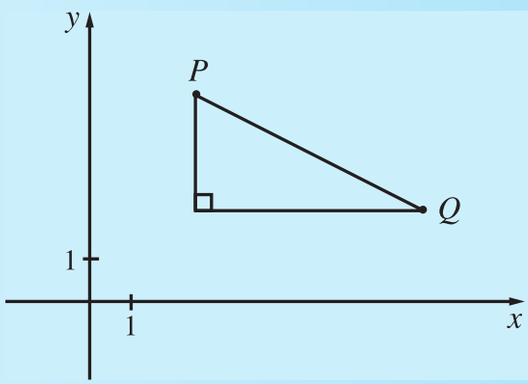
$$|AB|^2 = 3^2 + 4^2$$

$$|AB|^2 = 25$$

$$|AB| = \sqrt{25} = 5$$

**Vastaus** 5

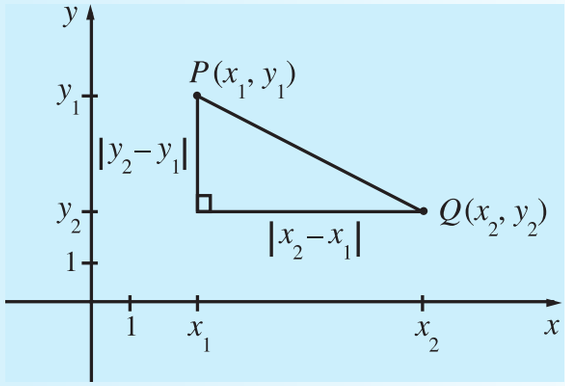
Jos koordinaatiston kahta pistettä yhdistävä jana ei ole koordinaattiakselin suuntainen, pisteiden etäisyys voidaan laskea Pythagoraan lauseella, sillä jana on hypotenuusa suorakulmaisessa kolmiossa, jonka kateetit ovat koordinaattiakselien suuntaiset.




Muodostetaan kaava, jolla voidaan laskea koordinaatiston pisteiden $P(x_1, y_1)$ ja $Q(x_2, y_2)$ etäisyys.

Ilmaistaan kolmion kateettien pituudet päätepisteiden koordinaattien avulla. Käyttämällä itseisarvoa kateettien pituudet voidaan ilmaista muodossa, joka ei riipu koordinaattien suuruusjärjestyksestä.

$x$-akselin suuntaisen kateetin pituus on pisteiden $P$ ja $Q$ $x$-koordinaattien erotuksen itseisarvo $|x_2 - x_1|$.
$y$-akselin suuntaisen kateetin pituus on pisteiden $y$-koordinaattien erotuksen itseisarvo $|y_2 - y_1|$.




Saadaan:

$|PQ|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$

Käytetään lukujen ominaisuutta $|a|^2 = a^2$. Ominaisuus pätee, koska luvun itseisarvo on joko luku itse tai luvun vastaluku, ja vastaluvun neliö on yhtä suuri kuin luvun neliö.

$|PQ|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Pisteiden $P$ ja $Q$ etäisyyden neliö on $x$-koordinaattien erotuksen ja $y$-koordinaattien erotuksen neliöiden summa.

$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Pisteiden $P$ ja $Q$ etäisyys.

### Kahden pisteen etäisyys tasossa

Pisteiden $P(x_1, y_1)$ ja $Q(x_2, y_2)$ etäisyys (pisteitä yhdistävän janan pituus) on $|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Lasketaan päätepisteiden $x$-koordinaattien erotuksen neliö ja $y$-koordinaattien erotuksen neliö. Janan pituus on neliöiden summan neliöjuuri.

Jos pisteitä $P(x_1, y_1)$ ja $Q(x_2, y_2)$ yhdistävä jana on koordinaattiakselin suuntainen eli jos pisteillä on sama $x$- tai $y$-koordinaatti, niin pisteiden etäisyys on eri suurten koordinaattien erotuksen itseisarvo. Yllä oleva yleinen etäisyyden kaava pätee myös silloin.*

---

* Oletetaan esimerkiksi, että jana on $y$-akselin suuntainen eli $x_1 = x_2$.
Janan pituus on tällöin $|y_2 - y_1|$. Toisaalta

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{0^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|,$$

sillä kaikille luvuille pätee $\sqrt{a^2} = |a|$.

## ESIMERKKI 2

Laske pisteiden $A(-4, 2)$ ja $B(3, -6)$ etäisyys.

**Ratkaisu**

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Sijoitetaan pisteiden $A(-4, 2)$ ja $B(3, -6)$ $x$-koordinaatit $x_2 = 3$, $x_1 = -4$ ja $y$-koordinaatit $y_2 = -6$, $y_1 = 2$.*

$$= \sqrt{(3 - (-4))^2 + (-6 - 2)^2}$$

$$= \sqrt{7^2 + (-8)^2}$$

$$= \sqrt{113} \approx 10{,}6$$

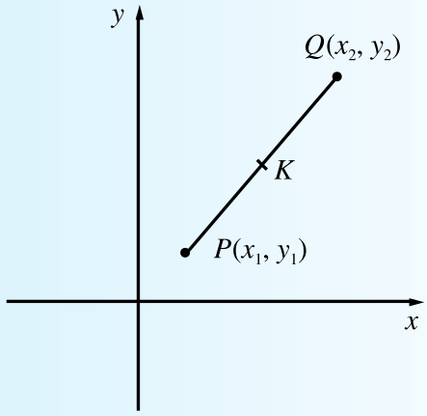
Pisteiden etäisyys on $\sqrt{113}$. Likiarvo lasketaan tarkistukseksi ja havainnollistukseksi.

**Vastaus** $\sqrt{113} \approx 10{,}6$

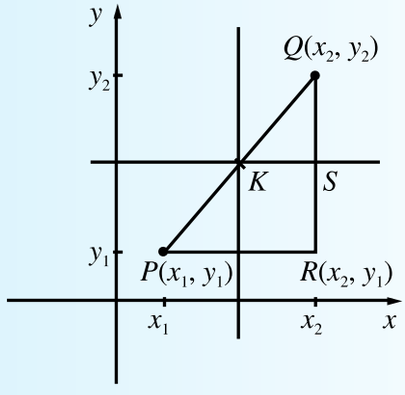
---

* Voitaisiin myös sijoittaa koordinaattien erotukset toisin päin: $x_2 = -4$, $x_1 = 3$ ja $y_2 = 2$, $y_1 = -6$.

Määritetään tason pisteitä $P(x_1, y_1)$ ja $Q(x_2, y_2)$ yhdistävän janan keskipiste $K$.




Täydennetään kuvioon suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat koordinaattiakselien suuntaiset, ja piirretään keskipisteen $K$ kautta koordinaattiakselien suuntaiset suorat.




$x$-akselin suuntainen suora puolittaa janan $RQ$ (yhdenmuotoiset kolmiot), joten leikkauspiste $S$ on janan $RQ$ keskipiste. Pisteen $S$ $y$-koordinaatti on päätepisteiden $y$-koordinaattien keskiarvo $\dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Pisteen $S$ $y$-koordinaatti on myös keskipisteen $K$ $y$-koordinaatti.

Vastaavasti keskipisteen $K$ $x$-koordinaatti on päätepisteiden $x$-koordinaattien keskiarvo $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

### Janan keskipiste tasossa

Pisteitä $(x_1, y_1)$ ja $(x_2, y_2)$ yhdistävän janan keskipiste on

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Keskipisteen $x$-koordinaatti on päätepisteiden $x$-koordinaattien keskiarvo. Keskipisteen $y$-koordinaatti on päätepisteiden $y$-koordinaattien keskiarvo.

## ESIMERKKI 3

Janan $AB$ päätepisteet ovat $A(-5, 3)$ ja $B(-1, -2)$. Mikä janan $AB$ keskipiste on?

**Ratkaisu**

Keskipisteen $x$-koordinaatti on

$$\frac{-5 + (-1)}{2} = \frac{-6}{2} = -3.$$ Päätepisteiden $x$-koordinaattien $-5$ ja $-1$ keskiarvo.

Keskipisteen $y$-koordinaatti on

$$\frac{3 + (-2)}{2} = \frac{1}{2}.$$ Päätepisteiden $y$-koordinaattien 3 ja $-2$ keskiarvo.

**Vastaus** $(-3, \frac{1}{2})$

## TEHTÄVIÄ

### SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**50.** Kolmion kärjet ovat pisteissä $(5, -2)$, $(4, 2)$ ja $(-1, 1)$. Kuinka suuri kolmion pinta-ala on?

**51.** Laske pisteiden etäisyys.
a) $(1, 4)$ ja $(-3, 6)$
b) $(-13, -16)$ ja $(8, -36)$
c) $(-25, 34)$ ja $(23, 34)$

**52.** Laske pisteen etäisyys origosta.
a) $(-2, 6)$ b) $(x, y)$

**53.** Laske janan keskipiste, kun janan päätepisteet ovat
a) origo ja $(6, -7)$
b) $(-1, 4)$ ja $(3, -5)$.

**54.** Kolmion $ABC$ kärkipisteet ovat $A(-2, 5)$, $B(-2, -1)$ ja $C(4, 3)$. Kuinka pitkä kärjestä $A$ piirretty kolmion keskijana on?

**55.** Janan $AB$ päätepiste $A$ on $x$-akselilla ja päätepiste $B$ $y$-akselilla. Määritä päätepisteet $A$ ja $B$, kun janan $AB$ keskipiste on
a) $(2, 3)$ b) $(x, y)$.

**56.** a) Ilmaise lausekkeena $x$-akselin pisteen $(x, 0)$ etäisyys pisteestä $(2, 3)$.
b) Määritä $x$-akselin pisteet, joiden etäisyys pisteestä $(2, 3)$ on $5$.

**57.** Inkan koti on kartan koordinaatiston pisteessä $(3, 4)$ ja Kallen koti pisteessä $(8, -1)$. Ystävykset tulevat yhdessä koulusta pitkin $x$-akselia ja sopivat eroavansa toisistaan kohdassa, joka on yhtä etäällä molemmista kodeista. Missä pisteessä he eroavat toisistaan?

**58.** $x$-akselin pisteitä $A(0, 0)$ ja $B(6, 0)$ yhdistävältä janalta valitaan piste $P$ ja $x$-akselin yläpuolelle piirretään neliöt $APCD$ ja $BPEF$. Osoita, että kaikilla näin saaduilla janoilla $DF$ on sama keskipiste.

### SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**59.** Laidunalue on muodoltaan kolmio. Karttakuvassa kolmion kärjet ovat kartan koordinaatiston pisteissä $(1, 2)$, $(4, 1)$ ja $(5, 5)$. Koordinaatiston yksikkö vastaa $50$ metriä luonnossa. Kuinka suuri laitumen pinta-ala on? Anna vastaus hehtaareina $0{,}1$ ha:n tarkkuudella.

**60.** Laske pisteiden etäisyys.
a) $(-4, 17)$ ja $(8, -18)$
b) $(-6, -3)$ ja $(-1, 2)$

**61.** Kolmion kärkipisteet ovat $A(17, -6)$, $B(10, 18)$ ja $C(-5, -2)$. Osoita, että kolmio $ABC$ on tasakylkinen.

**62.** Laske pisteitä yhdistävän janan keskipiste.
a) $(-1, -2)$ ja $(-8, 3)$
b) $(-\sqrt{2}, -1)$ ja $(7\sqrt{2}, 3)$

**63.** Määritä janan pituus ja toinen päätepiste, kun
a) janan toinen päätepiste on $(-2, 4)$ ja keskipiste $(1, 3)$
b) janan toinen päätepiste on origo ja keskipiste $(a, b)$.

**64.** Kartan koordinaatiston $y$-akselilla kulkeva laiva antaa hätäkutsun ja ilmoittaa olevansa 13 kilometrin päässä merivartioasemasta, joka sijaitsee pisteessä $(5, -3)$. Koordinaatiston yksikkö vastaa yhtä kilometriä. Missä $y$-akselin pisteessä laiva on?

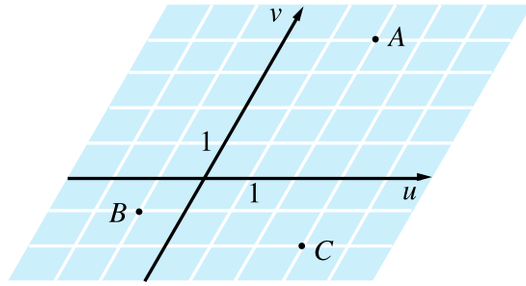
**65.** Pisteen $P$ $x$- ja $y$-koordinaatit ovat yhtä suuret, ja pisteen $P$ etäisyys pisteestä $(0, 2)$ on $2\sqrt{5}$. Määritä piste $P$.

**66.** Olkoon $O$ origo ja $A$ piste $(5, 0)$. Valitaan negatiiviselta $x$-akselilta piste $P$ ja piirretään $x$-akselin alapuolelle neliö $OPBC$ ja $x$-akselin yläpuolelle neliö $APDE$. Osoita, että kaikilla näin saaduilla janoilla $CE$ on sama keskipiste.

**67.** Muodostetaan $xy$-koordinaatistolla varustettuun tasoon uusi koordinaatisto seuraavasti: Valitaan uusiksi koordinaattiakseleiksi pisteen $(3, -2)$ kautta kulkevat $x$- ja $y$-akselien suuntaiset suorat. Kutsutaan näitä $x'$- ja $y'$-akseleiksi.
a) Mitkä ovat $xy$-koordinaatiston pisteiden $(2, 1)$ ja $(-1, -5)$ koordinaatit $x'y'$-koordinaatistossa?
b) Mitkä ovat $x'y'$-koordinaatiston pisteiden $(5, 2)$ ja $(-3, -1)$ koordinaatit $xy$-koordinaatistossa?
c) Mitkä ovat $xy$-koordinaatiston pisteen $(a, b)$ koordinaatit $x'y'$-koordinaatistossa?
d) Mitkä ovat $x'y'$-koordinaatiston pisteen $(a', b')$ koordinaatit $xy$-koordinaatistossa?

**68.** Niin sanottu *taksinkuljettajan etäisyys* suorakulmaisessa koordinaatistossa määritellään seuraavasti: Pisteiden $(x_1, y_1)$ ja $(x_2, y_2)$ taksinkuljettajan etäisyys on $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$.
Laske pisteiden
a) $(0, 5)$ ja $(3, 0)$
b) $(-1, -4)$ ja $(5, -8)$
taksinkuljettajan etäisyys.
c) Vertaa taksinkuljettajan etäisyyttä tavalliseen etäisyyteen.
d) Piirrä pisteestä $(1, 7)$ pisteeseen $(5, 2)$ reitti, jonka pituus on näiden pisteiden taksinkuljettajan etäisyys. Mistä nimitys taksinkuljettajan etäisyys on peräisin?

**69.** Kuvion vinokulmaisessa koordinaatistossa koordinaattiakselien välinen kulma on $60°$. Koordinaatistoon on merkitty pisteet $A(2, 4)$, $B(-1, -1)$ ja $C(3, -2)$.




a) Määritä pisteitä $A$ ja $B$ yhdistävän janan keskipisteen koordinaatit.
b) Laske pisteiden $A$ ja $B$ etäisyys.
c) Määritä kolmion $BCA$ pinta-ala.

**70.** Muodosta kaava, jolla voidaan laskea edellisen tehtävän koordinaatistossa
a) pisteitä $(u_1, v_1)$ ja $(u_2, v_2)$ yhdistävän janan keskipiste
b) pisteiden $(u_1, v_1)$ ja $(u_2, v_2)$ etäisyys
c) pisteen $(u, v)$ etäisyys origosta.

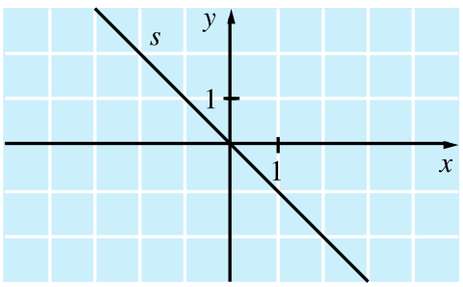
# Pistejoukon yhtälö

**Ongelma**

a) Merkitse koordinaatistoon pisteitä $(x, y)$, joiden koordinaatit toteuttavat yhtälön $x + y = 5$. Millaisen kuvion pisteet muodostavat?
b) Osoita, että pisteiden $(-5, 0)$, $(4, 3)$ ja $(-3, 4)$ koordinaatit toteuttavat yhtälön $x^2 + y^2 = 25$. Keksi lisää pisteitä, joiden koordinaatit toteuttavat yhtälön. Millaisen kuvion pisteet muodostavat?

## JOHDANTOESIMERKKI 1

Koordinaatistoon on piirretty laskeva suora $s$, joka puolittaa koordinaattiakselien välisen kulman. Minkä yhtälön suoran $s$ jokaisen pisteen koordinaatit toteuttavat?




**Ratkaisu**

Suoralla $s$ ovat ne tason pisteet, joiden $y$-koordinaatti on $x$-koordinaatin vastaluku. Tällaisia pisteitä ovat esimerkiksi $(1, -1)$, $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(-0{,}5;\ 0{,}5)$ ja $(-250, 250)$.

Suoran $s$ jokaisen pisteen $(x, y)$ koordinaatit toteuttavat yhtälön $y = -x$, ja toisaalta jokainen tason piste, jonka koordinaatit toteuttavat yhtälön $y = -x$, on suoralla $s$.

Piste sijaitsee siis suoralla $s$, jos ja vain jos sen koordinaatit toteuttavat yhtälön $y = -x$. Yhtälöä sanotaan suoran $s$ yhtälöksi. Yhtälö voidaan kirjoittaa myös muotoon $x + y = 0$.

**Vastaus**

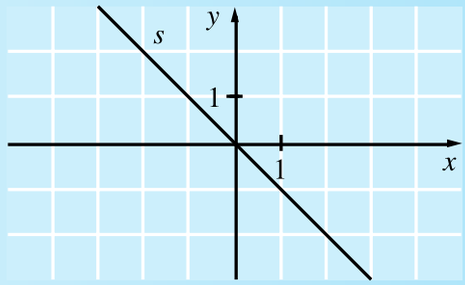
$y = -x \quad (x + y = 0)$

## Pistejoukon yhtälö

Monia koordinaatiston pistejoukkoja voidaan kuvata yhtälön avulla. *Pistejoukon yhtälö* on muuttujien $x$ ja $y$ yhtälö, jolla on ominaisuus:

Piste $(x, y)$ kuuluu pistejoukkoon, jos ja vain jos pisteen koordinaatit toteuttavat yhtälön.

Johdantoesimerkissä 1 päätelttiin, että viereisen suoran $s$ yhtälö on $y = -x$ eli $x + y = 0$. Siis piste $(x, y)$ on suoralla, jos ja vain jos $x + y = 0$.




Analyyttisessä geometriassa tutkitaan pistejoukkoja käyttämällä hyväksi pistejoukkojen yhtälöitä.

### ESIMERKKI 2

Pistejoukon yhtälö on $x^2 - xy = 0$.
a) Tutki, kuuluvatko pisteet $(3, 5)$ ja $(0, 5)$ pistejoukkoon.
b) Piirrä pistejoukko.

**Ratkaisu**

a) Tutkitaan, toteuttavatko pisteen $(3, 5)$ koordinaatit $x = 3$ ja $y = 5$ pistejoukon yhtälön.

$3^2 - 3 \cdot 5 = 0$

$9 - 15 = 0$

$-4 = 0$

epätosi

Koska pisteen $(3, 5)$ koordinaatit eivät toteuta yhtälöä, piste $(3, 5)$ ei kuulu pistejoukkoon.

Sijoitetaan vastaavasti pisteen $(0, 5)$ koordinaatit yhtälöön $x^2 - xy = 0$.

$0^2 - 0 \cdot 5 = 0$

$0 = 0$

tosi

Koska pisteen $(0, 5)$ koordinaatit toteuttavat yhtälön, piste $(0, 5)$ kuuluu pistejoukkoon.

b) On löydettävä kaikki pisteet $(x, y)$, joiden koordinaatit toteuttavat yhtälön $x^2 - xy = 0$. Koska lausekkeen $x^2 - xy$ termeillä on yhteinen tekijä $x$, lauseke voidaan saattaa tulon muotoon.

$x^2 - xy = 0$

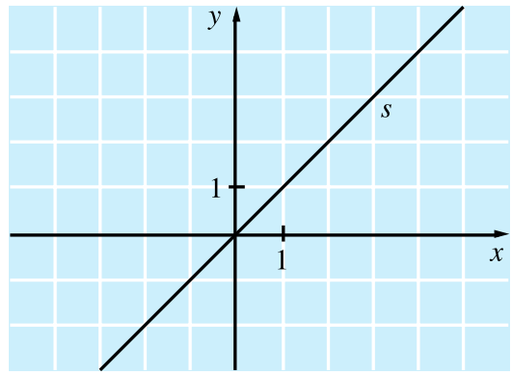
$x(x - y) = 0$ Käytetään tulon nollasääntöä.

$x = 0$ tai $x - y = 0$

Yhtälön $x = 0$ toteuttavat $y$-akselin pisteet.

Yhtälön $x - y = 0$ eli yhtälön $y = x$ toteuttavat pisteet, joiden $x$- ja $y$-koordinaatit ovat yhtä suuret. Pisteet muodostavat nousevan suoran $s$, joka puolittaa koordinaattiakselien välisen kulman.

Yhtälö $x^2 - xy = 0$ on siis sellaisen joukon yhtälö, joka muodostuu $y$-akselista ja suorasta $s$.




**Vastaus**

a) Piste $(3, 5)$ ei kuulu, piste $(0, 5)$ kuuluu.

## TEHTÄVIÄ

### SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**71.** Ilmaise ehto $xy$-tason pistejoukon yhtälönä, määritä joitakin joukkoon kuuluvia pisteitä ja piirrä niiden avulla pistejoukko.
a) Pisteen $y$-koordinaatti on kaksi kertaa niin suuri kuin pisteen $x$-koordinaatti.
b) Pisteen $y$- ja $x$-koordinaattien erotus on $1$.
c) Pisteen $x$-koordinaatti on $3$.

**72.** Pistejoukon yhtälö on $xy + y^2 = 0$.
a) Tutki, ovatko pisteet $A(0, 3)$, $B(7, -7)$ ja $C(-15, 0)$ pistejoukossa.
b) Piirrä pistejoukko.

**73.** Piirrä $xy$-tason pistejoukko, jonka yhtälö on
a) $x + 1 = 0$
b) $y - 4 = 0$
c) $(x + 1)(y - 4) = 0$.

**74.** Pistejoukko muodostuu niistä tason pisteistä, joiden $x$- ja $y$-koordinaattien neliöt ovat yhtä suuret.
a) Muodosta pistejoukon yhtälö.
b) Piirrä pistejoukko.

**75.** a) Ilmaise lausekkeena pisteiden $(x, y)$ ja $(1, 0)$ etäisyyden neliö ja pisteiden $(x, y)$ ja $(3, 0)$ etäisyyden neliö.
b) Pistejoukko muodostuu niistä tason pisteistä, joiden pisteistä $(1, 0)$ ja $(3, 0)$ laskettujen etäisyyksien neliöiden erotus on $8$. Muodosta ja sievennä pistejoukon yhtälö. Piirrä pistejoukko.

### SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**76.** Ilmaise ehto $xy$-tason pistejoukon yhtälönä, määritä joitakin joukkoon kuuluvia pisteitä ja piirrä niiden avulla pistejoukko.
a) Pisteen $x$- ja $y$-koordinaattien summa on $3$.
b) Pisteen $y$-koordinaatti on $-2$.

**77.** Piirrä tason pistejoukko, jonka yhtälö on
a) $x - 2 = 0$
b) $y + 3 = 0$
c) $(x - 2)(y + 3) = 0$.

**78.** Pistejoukon yhtälö on $x - y^2 = 0$.
a) Tutki, kuuluvatko pisteet $A(1, -1)$, $B(-1, 1)$ ja $C(100, -10)$ pistejoukkoon.
b) Pistejoukon yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $x = y^2$. Määritä joitakin pistejoukon pisteitä antamalla $y$-koordinaatille lukuarvoja ja laskemalla $x$-koordinaatit yhtälön avulla. Hahmottele laskettujen pisteiden avulla kuva pistejoukosta.

**79.** Piirrä pistejoukko, jonka yhtälö on
a) $4x^2 - y^2 = 0$
b) $x^2 + y^2 = 0$.

**80.** Pistejoukko muodostuu niistä tason pisteistä, jotka ovat yhtä etäällä $x$-akselista ja $y$-akselista. Piirrä pistejoukko ja muodosta pistejoukon yhtälö.

**81.** Pistejoukko muodostuu niistä tason pisteistä, joiden pisteistä $(0, -1)$ ja $(0, 5)$ laskettujen etäisyyksien neliöiden erotus on $12$. Muodosta ja sievennä pistejoukon yhtälö. Piirrä pistejoukko.

**82.** Piirrä pistejoukko, jonka yhtälö on

a) $|x - y| = 2$

b) $|y - x| = |x|$.

**83.** Piirrä pistejoukko.

a) $(2x - y)^2 = x^2$

b) $4x^2 + 4xy + y^2 = x^2$

**84.** Minkä kuvion muodostavat ne tason pisteet, joiden napakoordinaatit $(r, \varphi)$ toteuttavat ehdon

a) $r \leqslant 2$ ja $\varphi = 45°$

b) $r = 3$ ja $0 \leqslant \varphi \leqslant 180°$?

Tason pisteiden napakoordinaatit on määritelty tehtävässä 5 sivulla 10.

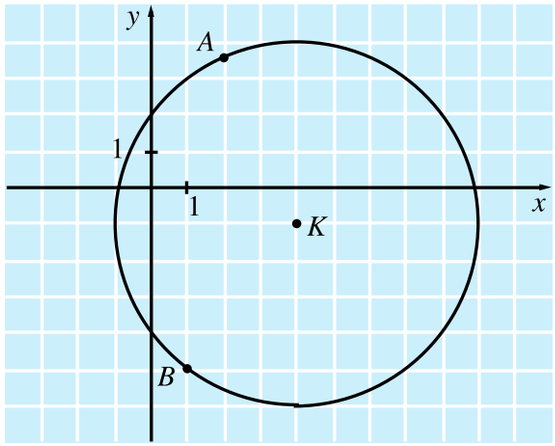
**85.** Piirrä pistejoukko, jonka yhtälö napakoordinaateilla ilmaistuna on

a) $r = 4$ b) $\varphi = 135°$ c) $r = \dfrac{\varphi}{90°}$.

# Ympyrän yhtälö

**Ongelma**

Ympyrän keskipiste on $K(4, -1)$ ja säde 5.
a) Sijaitsevatko pisteet $A(2; 3{,}5)$ ja $B(1, -5)$ ympyrällä, ympyrän sisäpuolella vai ympyrän ulkopuolella?
b) Ilmaise lausekkeena pisteen $P(x, y)$ etäisyys keskipisteestä $K$. Millä ehdolla piste $P(x, y)$ on ympyrällä?

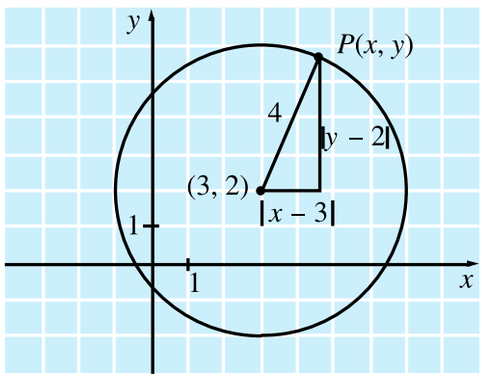



## JOHDANTOESIMERKKI 1

Ympyrän keskipiste on $(3, 2)$ ja säde 4. Muodosta ympyrän yhtälö.

**Ratkaisu**

Piste $P(x, y)$ on ympyrällä, jos ja vain jos pisteen etäisyys ympyrän keskipisteestä $(3, 2)$ on 4.




Pisteen $P(x, y)$ etäisyys keskipisteestä $(3, 2)$ on

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}.$$

$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, missä $(x_2, y_2) = (x, y)$ ja $(x_1, y_1) = (3, 2)$.

Siis piste $P(x, y)$ on ympyrällä, jos ja vain jos

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 4.$$

Yleensä yhtälö kirjoitetaan muodossa, jossa etäisyyden sijasta on etäisyyden neliö. Koska yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiiviset, yhtälö säilyy yhtäpitävänä, kun sen molemmat puolet korotetaan toiseen potenssiin.*

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4^2$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$$

**Vastaus** $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$

Yleistetään edellinen johdantoesimerkki muodostamalla yhtälö ympyrälle, jonka keskipiste on $(a, b)$ ja säde $r$.

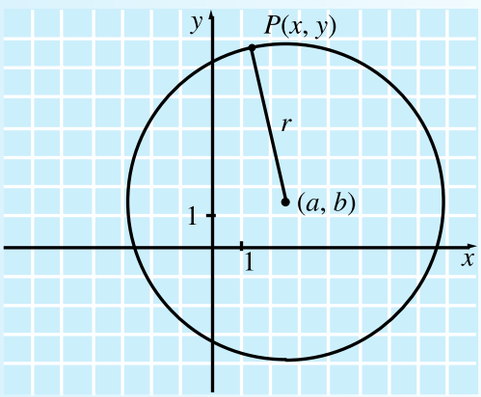
Pisteen $P(x, y)$ etäisyys keskipisteestä $(a, b)$ on

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

$\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$, missä $(x_2, y_2) = (x, y)$ ja $(x_1, y_1) = (a, b)$.

Piste $P(x, y)$ on ympyrällä, jos ja vain jos pisteen etäisyys keskipisteestä $(a, b)$ on $r$ eli jos ja vain jos

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r.$$




Yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiiviset, joten se on yhtäpitävä neliöön korottamalla saadun yhtälön

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

kanssa.

---

* Jos luvut $a$ ja $b$ ovat molemmat epänegatiivisia, niin ne ovat yhtä suuret, jos ja vain jos niiden neliöt ovat yhtä suuret.

Jos $a \geqslant 0$ ja $b \geqslant 0$, niin $a = b$, jos ja vain jos $a^2 = b^2$.

Epänegatiivisuusvaatimus on tarpeellinen, sillä esimerkiksi luvut 3 ja $-3$ eivät ole yhtä suuret, vaikka niiden neliöt ovat yhtä suuret.

### Ympyrän yhtälö

Jos ympyrän keskipiste on $(a, b)$ ja säde $r$, niin ympyrän yhtälö on

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Erotukseksi muista myöhemmin tulevista ympyrän yhtälön muodoista, tämänmuotoista yhtälöä kutsutaan usein ympyrän *keskipistemuotoiseksi* yhtälöksi.

## ESIMERKKI 2

Ympyrän keskipiste on $(-5, 3)$ ja säde $6$.
a) Muodosta ympyrän yhtälö.
b) Onko piste $(-1, -2)$ ympyrällä?

**Ratkaisu**

a) Käytetään ympyrän yhtälön kaavaa.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Sijoitetaan keskipisteen $(-5, 3)$ koordinaatit $a = -5$, $b = 3$ ja säde $r = 6$.

$$(x - (-5))^2 + (y - 3)^2 = 6^2$$
$$(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 36$$

b) Sijoitetaan pisteen $(-1, -2)$ koordinaatit $x = -1$ ja $y = -2$ ympyrän yhtälöön $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 36$.

$$(-1 + 5)^2 + (-2 - 3)^2 = 36$$
$$4^2 + (-5)^2 = 36$$
$$16 + 25 = 36$$
$$41 = 36$$
epätosi

Pisteen $(-1, -2)$ koordinaatit eivät toteuta ympyrän yhtälöä, joten piste ei ole ympyrällä.

**Vastaus**

a) $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 36$ b) Ei ole.

## ESIMERKKI 3

Määritä ympyrän keskipiste ja säde.
a) $(x-5)^2+(y+6)^2=30$
b) $x^2+y^2=25$

### Ratkaisu

a) Saatetaan yhtälö keskipistemuotoon $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

$(x-5)^2+(y+6)^2=30$ Saatetaan vasen puoli muotoon $(x-a)^2+(y-b)^2$.

$(x-5)^2+(y-(-6))^2=30$ Yhtälö on muotoa $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, missä $a=5$, $b=-6$ ja $r^2=30$.

Ympyrän keskipiste on $(5, -6)$. Koska $r^2=30$, niin säde $r=\sqrt{30}$.

b) Yhtälö $x^2+y^2=25$ voidaan kirjoittaa muotoon $(x-0)^2+(y-0)^2=25$. Siis ympyrän keskipiste on piste $(0, 0)$. Edelleen on $r^2=25$, joten säde $r=5$.

### Vastaus

a) Keskipiste on $(5, -6)$ ja säde $\sqrt{30}$.
b) Keskipiste on origo ja säde 5.

## ESIMERKKI 4

a) Määritä ympyrän $x^2 + (y - 2)^2 = 5$ keskipiste ja säde.
b) Saata ympyrän yhtälö sellaiseen muotoon, että ympyrä voidaan piirtää graafisen laskimen kuvaajanpiirtotoiminnolla.

**Ratkaisu**

a) Yhtälö $x^2 + (y - 2)^2 = 5$ voidaan kirjoittaa muotoon $(x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 5$. Ympyrän keskipiste on $(0, 2)$ ja säde $\sqrt{5}$.

b) Käyrien, jotka voidaan piirtää laskimen kuvaajanpiirtotoiminnolla, on oltava funktioiden kuvaajia eli muotoa $y = f(x)$.

Ratkaistaan ympyrän yhtälöstä $y$.

$$x^2 + (y - 2)^2 = 5$$

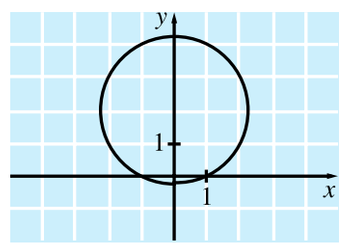
$$(y - 2)^2 = 5 - x^2$$

Yhtälö toteutuu, kun $y - 2$ on oikean puolen neliöjuuri tai neliöjuuren vastaluku.

$$y - 2 = \sqrt{5 - x^2} \quad \text{tai} \quad y - 2 = -\sqrt{5 - x^2}$$

$$y = 2 + \sqrt{5 - x^2} \quad \text{tai} \quad y = 2 - \sqrt{5 - x^2}$$

Ympyrä piirretään graafisella laskimella piirtämällä samaan koordinaatistoon kuvaajat $y = 2 + \sqrt{5 - x^2}$ ja $y = 2 - \sqrt{5 - x^2}$. *




**Vastaus**

a) keskipiste $(0, 2)$, säde $\sqrt{5}$

---

* Useimpien laskimien perusasetuksissa koordinaatisto on litistetty $y$-akselin suunnassa. Tällöin ympyrä piirtyy soikeana. Ympyrä saadaan oikean näköiseksi näppäimellä, joka asettaa molemmille akseleille samat asteikot (toiminto ZSQR tai vastaava). Joissakin graafisissa laskimissa on toiminto, jolla ympyrä voidaan piirtää myös syöttämällä laskimeen ympyrän keskipiste $(0, 2)$ ja säde $\sqrt{5}$.

## TEHTÄVIÄ

### SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**86.** Ympyrän keskipiste on origo ja säde 13. Ovatko pisteet $A(7, -11)$, $B(-12, 5)$ ja $C(-9, -9)$ ympyrällä, ympyrän sisäpuolella vai ympyrän ulkopuolella?

**87.** Muodosta keskipistemuotoinen yhtälö ympyrälle, jonka
a) keskipiste on $(-4, 3)$ ja säde 8
b) keskipiste on $(0, -7)$ ja säde 16
c) keskipiste on origo ja säde $\sqrt{10}$.

**88.** Ympyrän keskipiste on $(-2, 5)$ ja ympyrä kulkee pisteen $(3, 4)$ kautta.
a) Muodosta ympyrän yhtälö.
b) Onko piste $(-3, 0)$ ympyrällä?

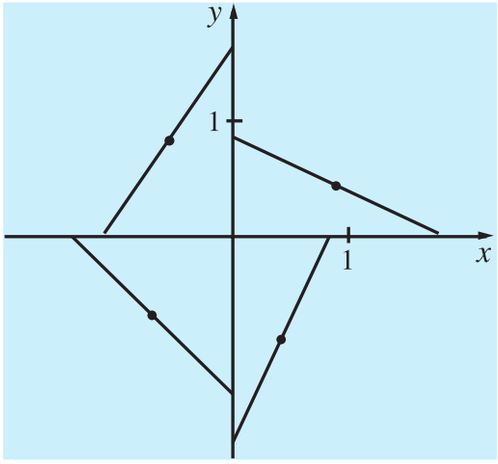
**89.** Esittääkö yhtälö ympyrää? Jos yhtälö esittää ympyrää, niin mikä on ympyrän keskipiste ja säde?
a) $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 50$
b) $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = -9$
c) $(x + 4)^2 + y^2 = 1$
d) $x^2 + y^2 = 9$
e) $9x^2 + 9y^2 = 4$

**90.** a) Millä vakion $k$ arvoilla yhtälö $(x + 2)^2 + (y - 7)^2 = k$ esittää ympyrää? Tutki edelleen, millä vakion $k$ arvoilla
b) ympyrän säde on 9
c) ympyrä kulkee origon kautta.

**91.** Määritä pisteen $(5, -2)$ etäisyys ympyrästä $x^2 + y^2 = 16$. Piirrä ensin kuvio.

**92.** Koordinaatistoon piirretyn neliön kolme kärkipistettä ovat pisteet $(-4, 2)$, $(2, 2)$ ja $(2, 8)$. Muodosta neliön a) sisään b) ympäri piirretyn ympyrän yhtälö.

**93.** Piirrä koordinaatistoon janoja, joiden toinen päätepiste on $x$-akselilla ja toinen päätepiste $y$-akselilla ja joiden pituus on 2. Millaisen kuvion janojen keskipisteet näyttävät muodostavan?




Keskipisteiden muodostaman käyrän luonteesta voi varmistua muodostamalla käyrän yhtälön. Muodosta yhtälö seuraavien ohjeiden avulla.
a) Merkitään janan keskipistettä $(x, y)$. Mitkä janan päätepisteet tällöin ovat?
b) Ilmaise janan pituus keskipisteen koordinaattien $x$ ja $y$ lausekkeena ja muodosta yhtälö käyttämällä tietoa: janan pituus on 2.
c) Sievennä b-kohdan yhtälö muotoon, josta voit tunnistaa käyrän. Minkä käyrän janojen keskipisteet muodostavat?

**94.** Saata ympyrän yhtälö sellaiseen muotoon, että ympyrä voidaan piirtää graafisella laskimella kahden funktion kuvaajana.
a) $x^2 + y^2 = 16$
b) $x^2 + (y + 5)^2 = 8$

## SARJA II.
## PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**95.** Ympyrän keskipiste on $(-5, 6)$ ja säde $\sqrt{146}$. Ovatko pisteet $A(3, -3)$ ja $B(-10, -5)$ ympyrällä, ympyrän sisäpuolella vai ympyrän ulkopuolella?

**96.** Muodosta ympyrän keskipistemuotoinen yhtälö, kun ympyrän keskipiste on $(-3, 5)$ ja

a) ympyrän säde on $\sqrt{10}$

b) ympyrä kulkee pisteen $(-1, 4)$ kautta.

**97.** Ympyrän erään halkaisijan päätepisteet ovat $(3, 1)$ ja $(5, -7)$. Mikä ympyrän yhtälö on?

**98.** Ympyrän säde on $3$, ja ympyrä sivuaa $y$-akselia pisteessä $(0, -5)$. Mikä on ympyrän
a) keskipiste b) yhtälö?

**99.** Määritä ympyrän keskipiste ja säde.

a) $(x - 12)^2 + (y + 1)^2 = 121$

b) $(x + 3)^2 + y^2 = 17$

c) $(x + u)^2 + (y - v)^2 = w \quad (w > 0)$

d) $25x^2 + 25y^2 = 9$

**100.** Piirrä ympyrät $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ ja $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ ja määritä ympyröiden etäisyys. Kahden pistejoukon etäisyydellä tarkoitetaan joukkojen pisteiden välistä lyhintä etäisyyttä.

**101.** Jana, jonka pituus on $6$, liikkuu ympyrän $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$ sisällä niin, että janan päätepisteet ovat koko ajan ympyrän kehällä. Osoita, että janan keskipiste piirtää ympyrän. Mikä on piirtyvän ympyrän yhtälö?

**102.** Jana, jonka pituus on $4$, liikkuu koordinaatistossa niin, että janan toinen päätepiste on koko ajan $x$-akselilla ja toinen päätepiste $y$-akselilla. Minkä käyrän janan keskipiste piirtää?

**103.** a) Saata ympyrän yhtälö $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 10$ sellaiseen muotoon, että ympyrä voidaan piirtää graafisella laskimella kahden funktion kuvaajana.

b) Yhtälö $y = 3 \pm \sqrt{2 - x^2}$ esittää ympyrää. Mikä on ympyrän keskipiste ja säde?

**104.** Ympyrä sivuaa $x$-akselia origossa ja kulkee pisteen $(4, 8)$ kautta. Mikä ympyrän yhtälö on?

**105.** Muodosta yhtälö niin sanotulle taksinkuljettajan ympyrälle eli käyrälle, jonka pisteet toteuttavat seuraavan ehdon: Piste $(x, y)$ on käyrällä, jos ja vain jos pisteen taksinkuljettajan etäisyys origosta on $4$. Piirrä käyrä. Pisteiden taksinkuljettajan etäisyys on määritelty tehtävässä 68 sivulla 35.

# Yhtälö $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

**ESIMERKKI 1**

Yhtälö $(x + 5)^2 + (y - 6)^2 = 30$ esittää ympyrää, jonka keskipiste on $(-5, 6)$ ja säde $\sqrt{30}$. Saata ympyrän yhtälö sellaiseen muotoon, jossa ei ole sulkeita ja jossa kaikki termit ovat vasemmalla puolella.

**Ratkaisu**

Suoritetaan neliöönkorotukset ja siirretään kaikki termit vasemmalle puolelle.

$$(x + 5)^2 + (y - 6)^2 = 30 \qquad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\ (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 12y + 36 = 30$$

$$x^2 + y^2 + 10x - 12y + 61 = 30 \qquad \big| - 30$$

$$x^2 + y^2 + 10x - 12y + 31 = 0$$

**Vastaus** $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 31 = 0$

Kun ympyrän keskipistemuotoisessa yhtälössä $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ binomit korotetaan neliöön ja yhtälön kaikki termit siirretään yhtälön vasemmalle puolelle, yhtälö tulee muotoon

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

Seuraavassa tutkitaan, esittääkö muotoa $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ oleva yhtälö aina ympyrää. Menetelmänä on saattaa yhtälö keskipistemuotoon soveltamalla summan ja erotuksen neliöiden muistikaavoja:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Menetelmään johdattelee seuraava esimerkki 2.

## ESIMERKKI 2

Lisää lausekkeeseen sellainen luku, että lausekkeesta tulee binomin neliö eli *täydennä lauseke neliöksi*.

a) $x^2 + 10x$ b) $y^2 - 3y$

### Ratkaisu

a) Lauseke ilmaistaan neliön ja kaksinkertaisen tulon summana.

$x^2 + 10x = x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x$ Lauseke on muotoa $a^2 + 2ab$.

Lisätään kertoimen 10 puolikkaan 5 neliö $5^2 = 25$.

$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$= (x + 5)^2$ *

b) $y^2 - 3y = y^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot y$ Lauseke on muotoa $a^2 - 2ab$.

Lisätään kertoimen 3 puolikkaan $\frac{3}{2}$ neliö $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

$y^2 - 3y + \frac{9}{4} = y^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot y + \left(\frac{3}{2}\right)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$= (y - \frac{3}{2})^2$

### Vastaus

a) $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$ b) $y^2 - 3y + \frac{9}{4} = (y - \frac{3}{2})^2$

---

* Neliöksi täydentämisen voi tarkistaa muistikaavalla:
$(x + 5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$.

## ESIMERKKI 3

Esittääkö yhtälö ympyrää? Jos yhtälö on ympyrän yhtälö, niin mikä on ympyrän keskipiste ja säde? Jos yhtälö ei esitä ympyrää, niin mitä pistejoukkoa se esittää?

a) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 2 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 6x + y + 10 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 50y + 625 = 0$

### Ratkaisu

a) Yhtälön vasen puoli täydennetään ympyrän keskipistemuotoisen yhtälön mukaiseksi kahden neliön summaksi. Kun yhtälön vasemmalle puolelle lisätään lukuja, ne on lisättävä myös yhtälön oikealle puolelle, jotta yhtälö säilyisi yhtäpitävänä.

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 2 = 0 \quad | -2$$

Vakiotermi siirretään oikealle puolelle ja termit ryhmitellään.

$$x^2 - 8x + y^2 + 2y = -2 \quad | + 4^2 + 1^2$$

Lisätään yhtälön molemmille puolille kertoimien 8 ja 2 puolikkaiden neliöt $4^2$ ja $1^2$.

$$x^2 - 8x + 4^2 + y^2 + 2y + 1^2 = -2 + 4^2 + 1^2$$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ ja $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 15$$

Yhtälö esittää ympyrää, jonka keskipiste on $(4, -1)$ ja säde $\sqrt{15}$.

b) Täydennetään yhtälön $x^2 + y^2 - 6x + y + 10 = 0$ vasemmalle puolelle kahden neliön summa.

$$x^2 + y^2 - 6x + y + 10 = 0 \quad | -10$$

Vakiotermi siirretään oikealle puolelle ja termit ryhmitellään.

$$x^2 - 6x + y^2 + y = -10 \quad | + 3^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Lisätään kertoimien 6 ja 1 puolikkaiden neliöt $3^2$ ja $\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

.

$$x^2 - 6x + 3^2 + y^2 + y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -10 + 3^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ ja $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$$(x - 3)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = -10 + 9 + \frac{1}{4}$$

$$(x - 3)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}$$

Yhtälö ei esitä ympyrää, koska negatiivinen luku $-\frac{3}{4}$ ei voi olla säteen neliö $r^2$.

Kahden neliön summa ei koskaan ole negatiivinen, joten minkään pisteen $(x, y)$ koordinaatit eivät toteuta yhtälöä. Yhtälö ei esitä mitään pistejoukkoa.

c) Suoritetaan neliöiksi täydentäminen.

$$x^2 + y^2 + 50y + 625 = 0 \quad | -625$$

$$x^2 + y^2 + 50y = -625 \quad | +25^2$$

Lisätään kertoimen 50 puolikkaan neliö.

$$x^2 + y^2 + 50y + 25^2 = -625 + 25^2$$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$$x^2 + (y + 25)^2 = -625 + 625$$

$$x^2 + (y + 25)^2 = 0$$

Yhtälö ei esitä ympyrää, koska luku 0 ei voi olla säteen neliö $r^2$.

Kahden neliön summa on nolla silloin ja vain silloin, kun kumpikin yhteenlaskettava on nolla. Yhtälö toteutuu vain, kun $x = 0$ ja $y = -25$. Yhtälö esittää pistettä $(0, -25)$.

**Vastaus**

a) Esittää ympyrää. Keskipiste on $(4, -1)$ ja säde $\sqrt{15}$.
b) Ei esitä ympyrää eikä mitään muutakaan pistejoukkoa.
c) Ei esitä ympyrää. Yhtälö esittää pistettä $(0, -25)$.

**Yhtälö $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$**

Muotoa $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ oleva yhtälö voidaan neliöiksi täydentämällä saattaa aina muotoon $(x - a)^2 + (y - b)^2 = d$.

Jos oikealle puolelle tuleva vakio $d$ on positiivinen, yhtälö esittää ympyrää, jonka keskipiste on $(a, b)$ ja säde $\sqrt{d}$.

Jos vakio $d$ on nolla, yhtälö esittää pistettä $(a, b)$.

Jos vakio $d$ on negatiivinen, yhtälö ei esitä mitään pistejoukkoa.

## ESIMERKKI 4

Minkä käyrän muodostavat ne tason pisteet, joiden etäisyys pisteestä $(5, 0)$ on kolme kertaa niin suuri kuin etäisyys pisteestä $(1, 0)$? Piirrä käyrä.

**Ratkaisu**

Pisteen $(x, y)$ etäisyys pisteestä $(5, 0)$ on $\sqrt{(x-5)^2 + y^2}$ ja etäisyys pisteestä $(1, 0)$ on $\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.

Pisteen $(x, y)$ etäisyys pisteestä $(5, 0)$ on kolme kertaa niin suuri kuin etäisyys pisteestä $(1, 0)$, jos ja vain jos:

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 3\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

Sievennetään yhtälöä. Molemmat puolet ovat epänegatiiviset, joten voidaan suorittaa neliöönkorotus.

$$(x-5)^2 + y^2 = 9((x-1)^2 + y^2)$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 9(x^2 - 2x + 1 + y^2)$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 9x^2 - 18x + 9 + 9y^2$$

$$8x^2 + 8y^2 - 8x - 16 = 0 \qquad | : 8$$

$$x^2 + y^2 - x - 2 = 0$$

Yhtälö on muotoa $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

$$x^2 - x + y^2 = 2 \qquad | + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

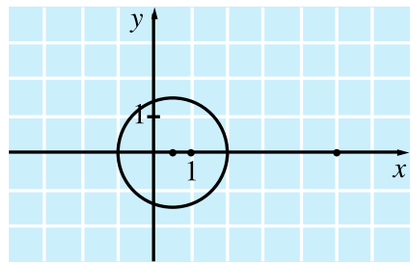
Lisätään kertoimen 1 puolikkaan neliö.

$$x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

Yhtälö esittää ympyrää, jonka keskipiste on $(\frac{1}{2}, 0)$ ja säde $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.




**Vastaus**

Ympyrän, jonka keskipiste on $(\frac{1}{2}, 0)$ ja säde $\frac{3}{2}$.

## TEHTÄVIÄ

### SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**106.** Saata ympyrän yhtälö
$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$ muotoon
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

**107.** Täydennä lausekkeisiin puuttuvat termit.

a) $x^2 + 12x$ ____ $= (x$ ____ $)^2$

b) $y^2 - 10y$ ____ $= (y$ ____ $)^2$

c) $x^2 - 5x$ ____ $= (x$ ____ $)^2$

d) $y^2 + 3y$ ____ $= (y$ ____ $)^2$

**108.** Onko yhtälö ympyrän yhtälö? Jos yhtälö on ympyrän yhtälö, niin mikä on ympyrän keskipiste ja säde? Jos yhtälö ei esitä ympyrää, niin mitä pistejoukkoa se esittää?

a) $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2y = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 45 = 0$

**109.** Mitä pistejoukkoa yhtälö esittää?

a) $x^2 + y^2 + 3x - y + 2 = 0$

b) $4x^2 + 4y^2 + 8x - 12y - 3 = 0$

(Ohje: Jaa yhtälö ensin sopivalla luvulla.)

**110.** Mikä on ympyröiden
$x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$ ja
$x^2 + y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$ etäisyys? Kahden pistejoukon etäisyydellä tarkoitetaan joukkojen pisteiden välistä lyhintä etäisyyttä.

**111.** Minkä käyrän muodostavat ne tason pisteet, joiden etäisyys pisteestä $(0, 3)$ on kaksi kertaa niin suuri kuin etäisyys origosta? Piirrä käyrä.

**112.** Millä vakion $c$ arvoilla yhtälö
$x^2 + y^2 + 14x - 4y + c = 0$ esittää ympyrää?

**113.** a) Millä vakion $k$ arvoilla yhtälö
$x^2 + y^2 - 2kx = 0$ esittää ympyrää? Mikä on ympyrän $x^2 + y^2 - 2kx = 0$ keskipiste ja säde?
b) Ympyrät, joiden yhtälö on muotoa
$x^2 + y^2 - 2kx = 0$, muodostavat *ympyräparven*. Piirrä parven ympyröitä niin monella vakion $k$ arvolla, että saat ympyräparvesta havainnollisen kuvan.

### SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**114.** Täydennä lauseke neliöksi.

a) $x^2 - 14x$ b) $y^2 + 9y$

**115.** Mitä pistejoukkoa yhtälö esittää?

a) $x^2 + y^2 + 20x - 18y + 37 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 8x + 16 = 0$

c) $x^2 + y^2 = 16$

**116.** Mitä pistejoukkoa yhtälö esittää?

a) $x^2 + y^2 - 5x + 3y - 2 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x + y = 0$

c) $4x^2 + 4y^2 - 24x + 4y + 37 = 0$

**117.** Piirrä koordinaatistoon pistejoukko, jonka pisteiden koordinaatit toteuttavat ehdon:
$x^2 + y^2 - 2y - 3 \leqslant 0$ ja $y \geqslant 1$.

**118.** Mikä on ympyrän
$x^2 + y^2 - 14x + 8y + 55 = 0$ etäisyys
a) pisteestä $(-5, 0)$ b) $x$-akselista?

**119.** Minkä käyrän muodostavat ne tason pisteet, joiden pisteestä $(5, 0)$ mitatun etäisyyden suhde pisteestä $(0, -5)$ mitattuun etäisyyteen on $\frac{2}{3}$?

**120.** Muodosta lauseke, joka ilmaisee ympyrän ulkopuolella olevan pisteen $(x, y)$ etäisyyden ympyrästä

a) $x^2 + y^2 = 4$

b) $(x - 9)^2 + y^2 = 16$.

c) Minkä käyrän muodostavat pisteet, joiden etäisyys ympyrästä $(x - 9)^2 + y^2 = 16$ on kaksi kertaa niin suuri kuin etäisyys ympyrästä $x^2 + y^2 = 4$?

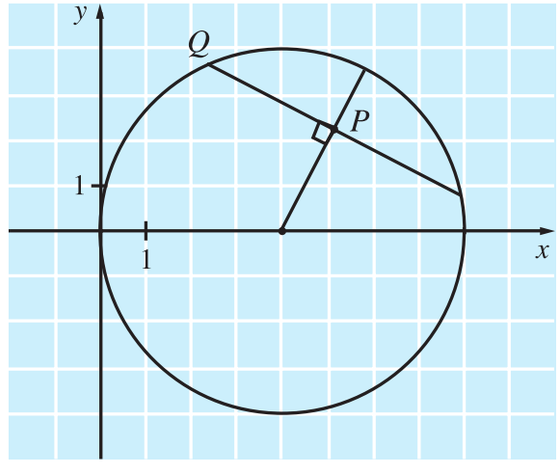
**121.** Millä vakion $a$ arvoilla yhtälö $x^2 + y^2 + ax + a = 0$ esittää ympyrää?

**122.** a) Millä vakion $k$ arvoilla yhtälö $x^2 + y^2 - 2kx - 2ky + k^2 = 0$ esittää ympyrää? Mikä on ympyrän $x^2 + y^2 - 2kx - 2ky + k^2 = 0$ keskipiste ja säde?

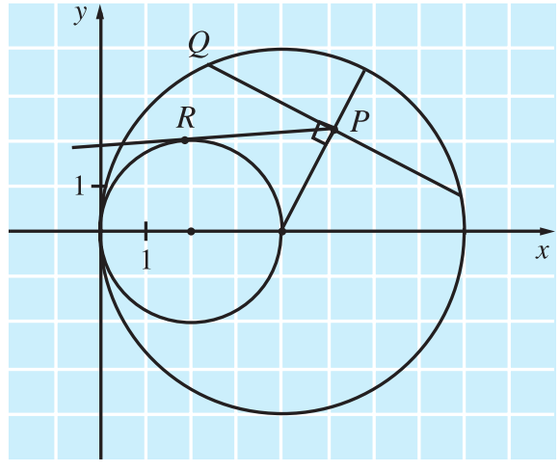
b) Piirrä ympyräparven $x^2 + y^2 - 2kx - 2ky + k^2 = 0$ yhtälöitä niin monella vakion $k$ arvolla, että saat ympyräparvesta havainnollisen kuvan.

**123.** Kuminauhan toinen pää on origossa ja nauhan toinen pää liikkuu pitkin käyrää $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$. Minkä käyrän kuminauhan keskipiste piirtää? Piirrä molemmat käyrät samaan kuvioon.

**124.** a) Ympyrän keskipiste on $(4, 0)$ ja säde 4. Ympyrän sisällä olevan pisteen $P(x, y)$ kautta piirretään pisteen $P$ kautta kulkevaa ympyrän sädettä vastaan kohtisuora jänne. Minkä käyrän muodostavat ne pisteet $P(x, y)$, joille jänteen puolikkaan $PQ$ pituus on yhtä suuri kuin pisteen $P$ etäisyys pisteestä $(2, 0)$?




b) Pisteen $P(x, y)$ kautta piirretään edelleen (jos mahdollista) tangentti ympyrälle, jonka keskipiste on $(2, 0)$ ja säde 2. Olkoon sivuamispiste $R$. Minkä käyrän muodostavat ne pisteet $P(x, y)$, joille janan $PR$ pituus on yhtä suuri kuin jänteen puolikkaan $PQ$ pituus?



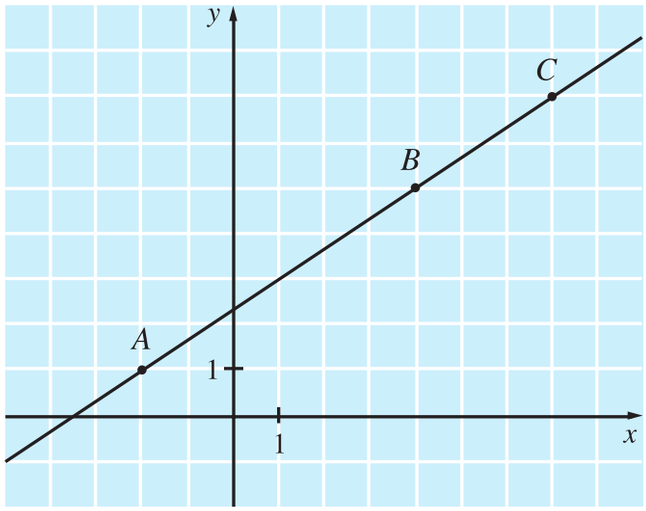
# Suoran kulmakerroin

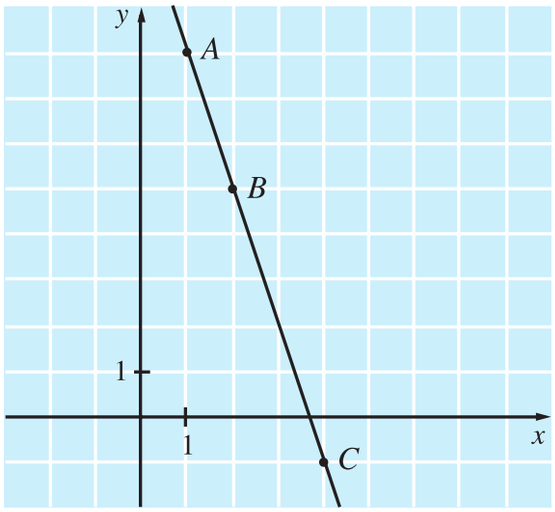
**Ongelma**

Tutki molemmilla suorilla suhdetta

$$\frac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}},$$

kun suoralla siirrytään pisteestä $A$ pisteeseen $B$ ja edelleen pisteestä $B$ pisteeseen $C$.



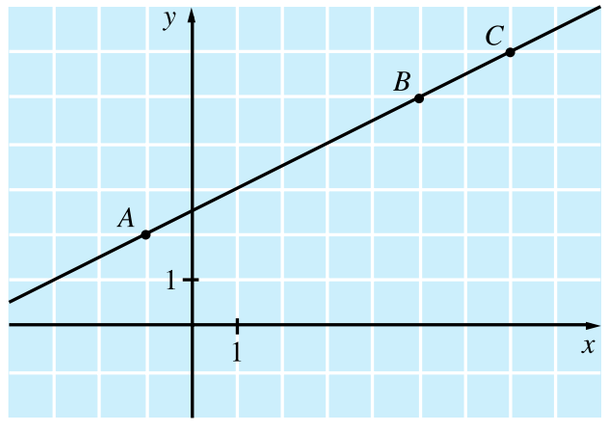



## JOHDANTOESIMERKKI 1

Koordinaatistoon on piirretty suora, joka kulkee pisteiden $A(-1, 2)$, $B(5, 5)$ ja $C(7, 6)$ kautta. Tutki suhdetta

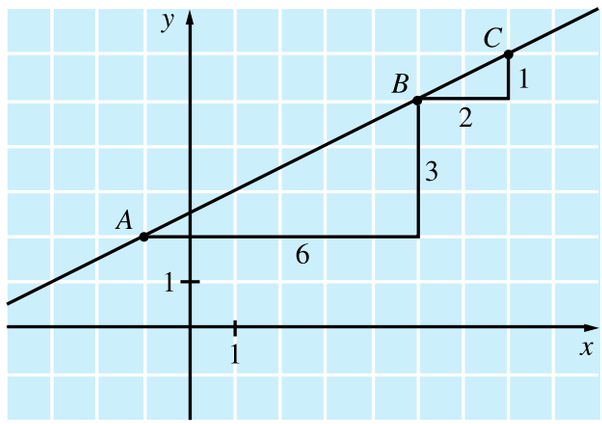
$$\frac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}},$$

kun siirrytään pisteestä $A$ pisteeseen $B$ ja edelleen pisteestä $B$ pisteeseen $C$.




**Ratkaisu**

Koordinaattien muutosta havainnollistavat kuviossa suorakulmaiset apukolmiot. Apukolmion pystysuoran sivun pituus on yhtä suuri kuin $y$-koordinaatin muutos ja vaakasuoran sivun pituus yhtä suuri kuin $x$-koordinaatin muutos.




Kun siirrytään pisteestä $A$ pisteeseen $B$, muutosten suhde on $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Kun siirrytään pisteestä $B$ pisteeseen $C$, suhde on $\frac{1}{2}$.

Suhteet ovat yhtä suuret. Geometrinen perustelu yhtäsuuruudelle on, että kuvion apukolmiot ovat yhdenmuotoiset (kk).

**Vastaus**

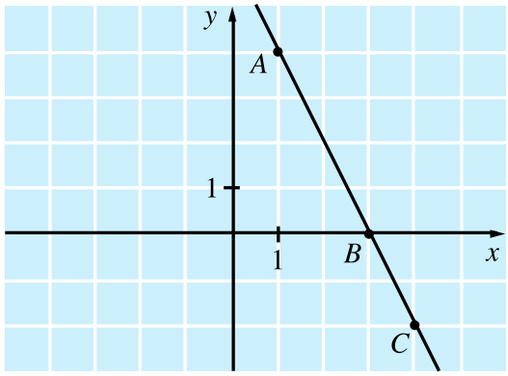
Kumpikin suhde on $\frac{1}{2}$.

## JOHDANTOESIMERKKI 2

Koordinaatistoon on piirretty suora, joka kulkee pisteiden $A(1, 4)$, $B(3, 0)$ ja $C(4, -2)$ kautta. Tutki suhdetta

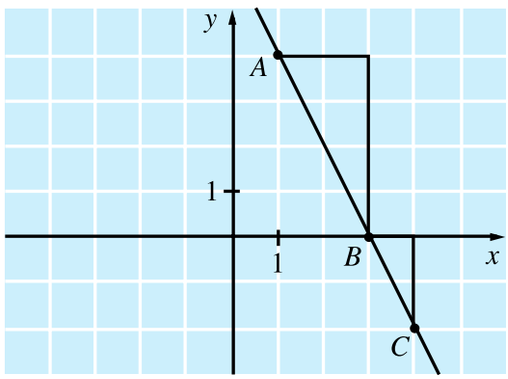
$$\frac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}},$$

kun siirrytään pisteestä $A$ pisteeseen $B$ ja edelleen pisteestä $B$ pisteeseen $C$.




**Ratkaisu**

Kun siirrytään pisteestä $A$ pisteeseen $B$ ja edelleen pisteestä $B$ pisteeseen $C$, $y$-koordinaatin muutos on negatiivinen ja $x$-koordinaatin muutos positiivinen. Kuvioon piirretyn apukolmion kateettien pituudet ovat muutosten itseisarvot.




Kun siirrytään pisteestä $A$ pisteeseen $B$, muutosten suhde on $\frac{-4}{2} = -2$.

Kun siirrytään pisteestä $B$ pisteeseen $C$, suhde on $\frac{-2}{1} = -2$.

Suhteet ovat yhtä suuret.

**Vastaus**

Kumpikin suhde on $-2$.

### Suoran kulmakertoimen määritelmä

Kun siirrytään suoran pisteestä toiseen pisteeseen, niin suhde

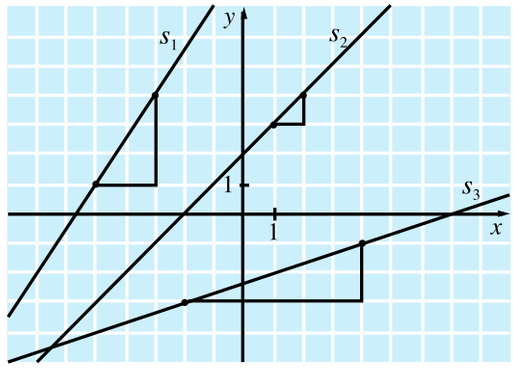
$$\frac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}}$$

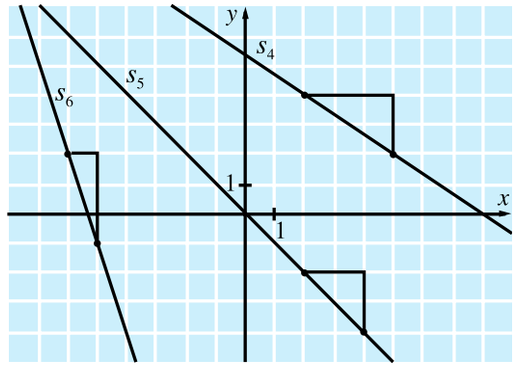
on aina sama. Suhdetta sanotaan suoran *kulmakertoimeksi*.

Nousevan suoran kulmakerroin on positiivinen ja laskevan suoran negatiivinen.

## ESIMERKKI 3

Määritä suorien kulmakertoimet.




**Ratkaisu**

Kulmakerroin voidaan määrittää minkä tahansa kahden suoralla olevan pisteen avulla. Kulmakertoimet voidaan lukea kuvioon piirretyistä apukolmioista. Apukolmion kateettien pituudet ovat koordinaattien muutosten itseisarvot.

suora $s_1$: $\frac{3}{2}$

suora $s_2$: $\frac{1}{1} = 1$

suora $s_3$: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

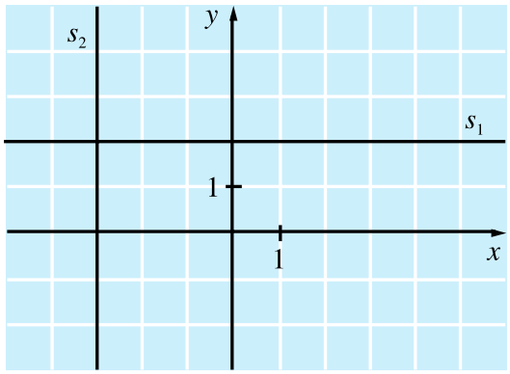
suora $s_4$: $-\frac{2}{3}$

suora $s_5$: $-\frac{2}{2} = -1$

suora $s_6$: $-\frac{3}{1} = -3$

## JOHDANTOESIMERKKI 4

Määritä kuvion suorien kulmakertoimet.




**Ratkaisu**

Kun $x$-akselin suuntaisella suoralla $s_1$ siirrytään pisteestä toiseen, $y$-koordinaatin muutos on aina $0$. Siis suhde $\dfrac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}}$ on $0$. Suoran $s_1$ kulmakerroin on $0$.

Kun $y$-akselin suuntaisella suoralla $s_2$ siirrytään pisteestä toiseen, $x$-koordinaatin muutos on aina $0$. Koska nollalla ei voi jakaa, suhdetta $\dfrac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}}$ ei ole määritelty. Suoralla $s_2$ ei ole kulmakerrointa.

**Vastaus**

$x$-akselin suuntaisen suoran $s_1$ kulmakerroin on $0$.
$y$-akselin suuntaisella suoralla $s_2$ ei ole kulmakerrointa.

### Koordinaattiakselien suuntaisten suorien kulmakertoimet

$x$-akselin suuntaisen suoran kulmakerroin on $0$.

$y$-akselin suuntaisella suoralla ei ole kulmakerrointa.

Suoran kulmakerroin määrää täysin suoran suunnan:

**Suorien yhdensuuntaisuus**

Kaksi suoraa, jotka eivät ole $y$-akselin suuntaisia, ovat yhdensuuntaiset, jos ja vain jos niiden kulmakertoimet ovat yhtä suuret.

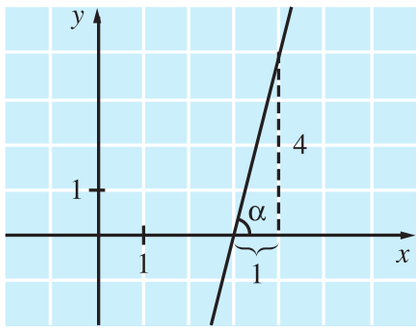
## ESIMERKKI 5

Määritä asteen kymmenesosan tarkkuudella suoran ja $x$-akselin välisen terävän kulman suuruus, kun suoran kulmakerroin on a) 4 b) $-\frac{2}{3}$.

**Ratkaisu**

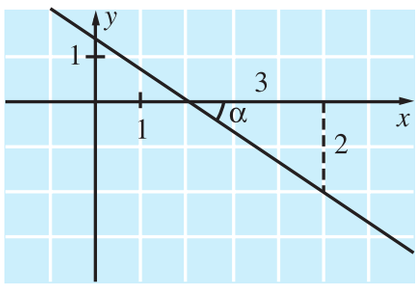
a) Suoran ja $x$-akselin välisen kulman suuruus ei riipu siitä, missä pisteessä suora leikkaa $x$-akselin. Apukolmiosta saadaan:

$$\tan\alpha = \frac{4}{1}$$
$$\tan\alpha = 4$$
$$\alpha \approx 76{,}0°$$




b) Apukolmiosta saadaan:

$$\tan\alpha = \frac{2}{3}$$
$$\alpha \approx 33{,}7°$$




**Vastaus**

a) 76,0° b) 33,7°

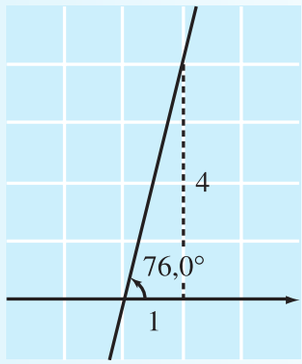
Suoran suunta voidaan ilmoittaa myös niin, että ilmoitetaan suoran ja $x$-akselin välisen kulman suuruus ja ilmaistaan etumerkillä, onko suora nouseva vai laskeva. Tällöin on kyseessä tavallisen kulmakäsitteen yleistys, niin sanottu *suunnattu kulma,* johon perehdytään kurssissa Trigonometriset funktiot ja lukujonot.

### Suoran suuntakulma

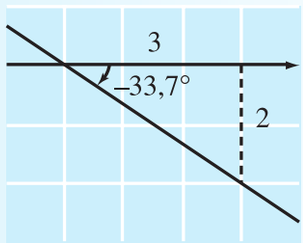
Jos suora ei ole $y$-akselin suuntainen, suoran ja $x$-akselin välistä terävää suunnattua kulmaa kutsutaan suoran *suuntakulmaksi*. Suuntakulma ilmaisee, kuinka monta astetta ja mihin kiertosuuntaan suoran suunta poikkeaa $x$-akselin suunnasta. Nousevan suoran suuntakulma on positiivinen ja laskevan suoran negatiivinen.

$y$-akselin suuntaisen suoran suuntakulmaksi on sovittu $90°$.

Jos suoran kulmakerroin on $4$, niin edellisen esimerkin mukaan suoran suuntakulma on noin $76{,}0°$. Suuntakulma ratkaistiin yhtälöllä $\tan\alpha = 4$, eli suuntakulman tangentti on yhtä suuri kuin suoran kulmakerroin.




Jos suoran kulmakerroin on $-\frac{2}{3}$, niin edellisen esimerkin mukaan suoran suuntakulma on noin $-33{,}7°$. Suuntakulman itseisarvo ratkaistiin yhtälöllä $\tan\alpha = \frac{2}{3}$.




Suuntakulma voidaan aina määrittää kulmakertoimen avulla.

Kurssissa Trigonometriset funktiot ja lukujonot tangentin määritelmä yleistetään negatiivisille suunnatuille kulmille. Osoittautuu, että kulmakertoimen merkistä riippumatta suoran suuntakulman tangentti on suoran kulmakerroin.

### Suuntakulman määrittäminen suunnatun kulman tangentin avulla

Olkoon $\alpha$ suoran suuntakulma ja $k$ kulmakerroin. Suuntakulman ja kulmakertoimen merkistä riippumatta on aina

$$\tan\alpha = k.$$

Laskin tunnistaa negatiiviset kulmat, joten laskimella voidaan suoraan määrittää suuntakulma silloinkin, kun kulmakerroin on negatiivinen.*

---

* Esimerkiksi jos suoran kulmakerroin on $-3$, niin laskimesta riippuen näppäillään [tan⁻¹] [(] [(–)] 3 [)] tai 3 [±] [tan⁻¹]. Laskin antaa tuloksen $-71{,}56...°$.

## ESIMERKKI 6

Suoran $s_1$ kulmakerroin on $\frac{1}{2}$, ja suoran $s_2$ kulmakerroin on $-3$. Määritä asteen tarkkuudella suorien välisen kulman suuruus. Kahden suoran välisellä kulmalla tarkoitetaan suorien muodostamaa terävää kulmaa.

### Ratkaisu

Suorien välisen kulman suuruuteen ei vaikuta suorien leikkauspisteen sijainti. Kulmat $\alpha$ ja $\beta$ voidaan määrittää kulmakertoimien apukolmioista.

$$\tan\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha \approx 26{,}57°$$

$$\tan\beta = 3$$

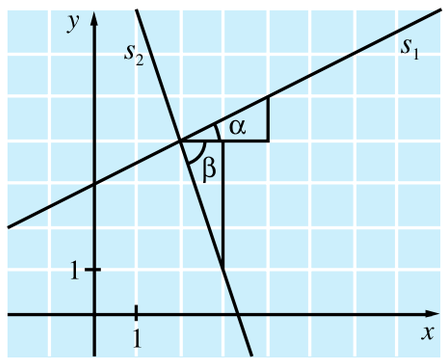
$$\beta \approx 71{,}57°$$

Kulmien $\alpha$ ja $\beta$ summa on

$$\alpha + \beta \approx 26{,}57° + 71{,}57° = 98{,}14° \approx 98°.$$

Koska kahden suoran välinen kulma on suorien muodostama terävä kulma, suorien $s_1$ ja $s_2$ välisen kulman suuruus on

$$180° - 98° = 82°.$$




### Vastaus

82°*

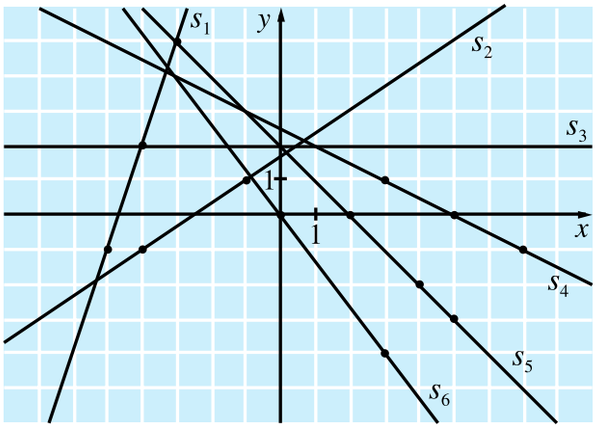
---

* Kahden suoran välinen kulma voidaan määrittää myös taulukkokirjoissa olevalla kaavalla. Kaavan käyttöä harjoitellaan tehtävissä 131 ja 141.

## TEHTÄVIÄ

### SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**125.** Määritä suorien kulmakertoimet.




**126.** Määritä kuvion avulla pisteiden kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

a) $(1, 2)$ ja $(4, -3)$
b) $(-2, 4)$ ja $(3, 4)$
c) $(-1, 1)$ ja $(3, 2)$
d) $(3, -1)$ ja $(3, 1)$

**127.** Piirrä suora ja selvitä kuviosta suoran ja $y$-akselin leikkauspiste, kun

a) suora kulkee pisteen $(-4, 2)$ kautta, ja suoran kulmakerroin on $\frac{1}{2}$

b) suora kulkee pisteen $(6, 1)$ kautta, ja suoran kulmakerroin on $\frac{2}{3}$

c) suora kulkee pisteen $(3, -4)$ kautta, ja suoran kulmakerroin on $-3$.

**128.** Määritä asteen kymmenesosan tarkkuudella suoran suuntakulma, kun suoran kulmakerroin on

a) $\frac{5}{3}$ b) $-2$ c) $-\frac{4}{3}$.

**129.** Mikä on suoran kulmakerroin, jos suoran suuntakulma on

a) $45°$ b) $0°$ c) $-45°$?

**130.** Suoran $s_1$ kulmakerroin on $\frac{3}{2}$, ja suoran $s_2$ kulmakerroin on $\frac{1}{3}$.

Kuinka suuri suorien välinen kulma on? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

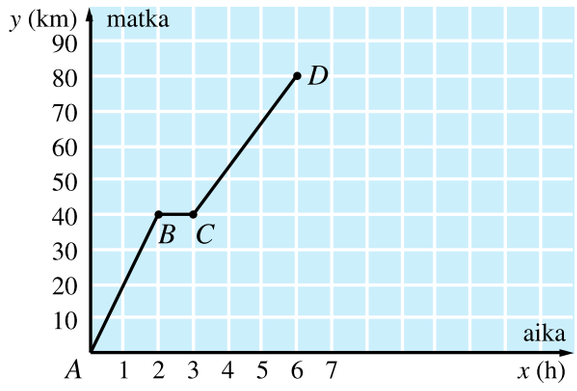
**131.** Jos kahden suoran kulmakertoimet ovat $k_1$ ja $k_2$, niin suorien välisen kulman tangentti voidaan määrittää taulukkokirjoissa olevalla kaavalla

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

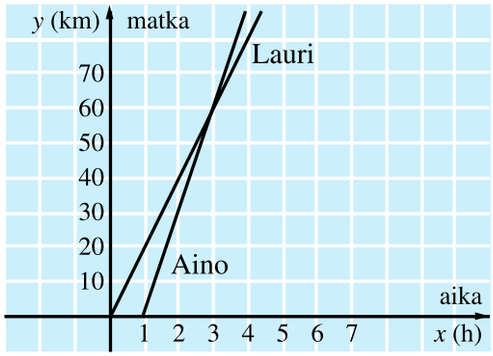
Määritä kaavan avulla asteen kymmenesosan tarkkuudella suorien välinen kulma, kun suorien kulmakertoimet ovat

a) 2 ja 3 b) 4 ja $-\frac{1}{2}$.

**132.** Koordinaatistoon piirretty murtoviiva kuvaa matkan taittumista pyöräretkellä. Määritä janojen $AB$, $BC$ ja $CD$ kulmakertoimet. Mitä kulmakertoimet ilmaisevat? Kuvaile matkan kulkua.



**133.** Aino pääsi aloittamaan päivän pyöräretken Laurin jo lähdettyä. Päättele kuviosta:
a) Millä nopeudella Aino ja Lauri pyöräilivät?
b) Kuinka paljon myöhemmin Aino lähti matkaan?
c) Kuinka pitkän matkan he olivat pyöräilleet, kun Aino tavoitti Laurin? Kuinka kauan Lauri oli tällöin pyöräillyt?

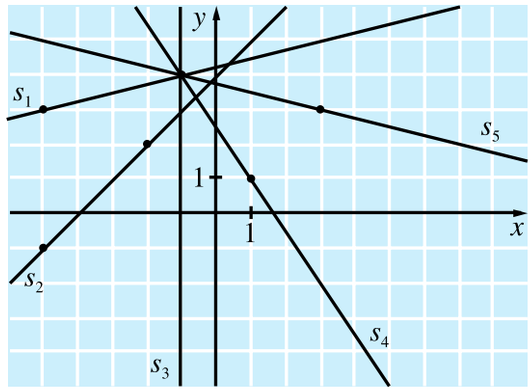



**134.** Suoran kulmakerroin on a) $-2$ b) $\frac{2}{3}$.

Kuinka pisteen $y$-koordinaatti muuttuu, kun suoralla liikuttaessa pisteen $x$-koordinaatti kasvaa kuudella? Entä kuinka $y$-koordinaatti muuttuu, kun $x$-koordinaatti pienenee yhdellä?

## SARJA II.
## PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**135.** Määritä kuviosta suorien kulmakertoimet.




**136.** Suora kulkee pisteen $(-4, 1)$ ja pisteen a) $(-2, 4)$ b) $(0, 0)$ c) $(-4, -1)$ d) $(0, -3)$ kautta. Määritä kuvion avulla suoran kulmakerroin.

**137.** Suora kulkee pisteen $(-2, 3)$ kautta ja suoran kulmakerroin on a) $-3$ b) $-\frac{1}{2}$.
Määritä kuvion avulla suoran ja $x$-akselin leikkauspiste.

**138.** Mikä on suoran suuntakulma, jos suoran kulmakerroin on a) 6 b) $-\frac{1}{6}$? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

**139.** Määritä suoran kulmakertoimen likiarvo kahden desimaalin tarkkuudella, kun suoran suuntakulma on a) $25°$ b) $-75°$.

**140.** Suoran $s_1$ kulmakerroin on $-\frac{4}{3}$, ja suoran $s_2$ kulmakerroin on $\frac{2}{5}$.
Kuinka suuri suorien välinen kulma on? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

**141.** Määritä tehtävän 131 kaavan avulla asteen sadasosan tarkkuudella suorien välinen kulma, kun suorien kulmakertoimet ovat

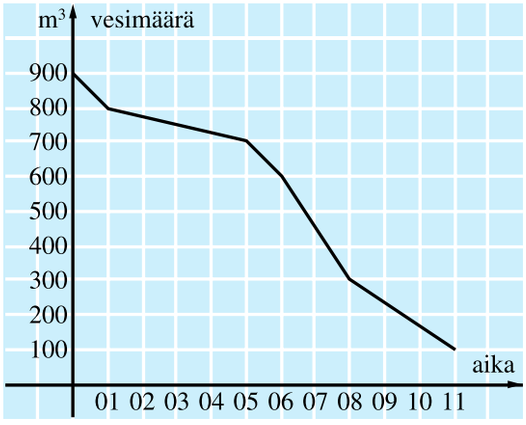
a) $-\frac{2}{3}$ ja $-\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ ja $-\frac{4}{3}$.

**142.** Tuomas lähti päivän pyöräretkiosuudelle kaksi tuntia Ainon jälkeen. Aino pyöräilee nopeudella 15 km/h ja Tuomas nopeudella 25 km/h. Piirrä koordinaatistoon heidän etenemistään kuvaavat suorat. Päättele kuviosta,

a) kuinka kauan Tuomas saa pyöräillä tavoittaakseen Ainon

b) kuinka pitkän matkan kumpikin on tällöin pyöräillyt.

**143.** Vesitornin vesimäärä tarkistettiin keskiyöllä ja sen jälkeen kello 1, 5, 6, 8 ja 11. Mittarinlukemien avulla piirrettiin viereinen kuvaaja. Tarkkailuaikana säiliöön ei lisätty vettä. Mihin aikaan vedenkulutus oli suurinta ja mihin aikaan pienintä? Kuinka suuri vedenkulutus tällöin oli (yksikkönä kuutiometriä tunnissa)?




**144.** Pitkäaikaisten säätilastojen mukaan vuorokauden keskilämpötila Helsingin Kaisaniemessä on huhtikuun 1. päivänä –0,6 °C ja huhtikuun 21. päivänä 3,4 °C. Keskilämpötila kohoaa tällä aikavälillä likimain suoraviivaisesti. Piirrä tämä suora ja määritä suoran kulmakerroin. Mitä kulmakerroin ilmaisee? Mikä tämän ns. lineaarisen mallin mukaan vuorokauden keskilämpötila on huhtikuun 15. päivänä? Minä päivänä Helsingissä keskimäärin alkaa ns. terminen kevät, eli vuorokauden keskilämpötila ylittää 0 °C? Jatkuuko lämpötilan kehitys huhtikuun 21. päivän jälkeen koko ajan suoraviivaisena?

**145.** Piirrä koordinaatistoon paraabeli $y = x^2$. Paraabelilla ovat muun muassa origo sekä pisteet $A(1, 1)$, $B(2, 4)$, $C(3, 9)$. Laske $y$-koordinaatin muutoksen suhde $x$-koordinaatin muutokseen, kun siirrytään

a) origosta pisteeseen $A$

b) pisteestä $A$ pisteeseen $B$

c) pisteestä $B$ pisteeseen $C$.

Voidaanko paraabelille määritellä kulmakerroin?

# Kulmakertoimen laskeminen

## JOHDANTOESIMERKKI 1

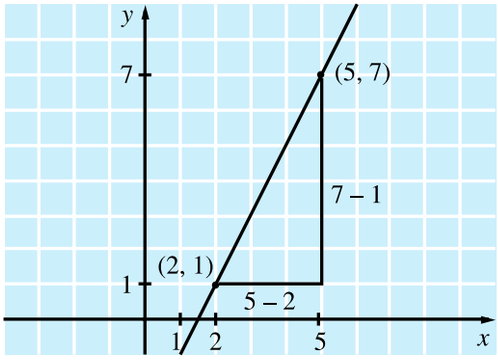
Määritä pisteiden
a) $(2, 1)$ ja $(5, 7)$
b) $(x_1, y_1)$ ja $(x_2, y_2)$, missä $x_1 \neq x_2$,
kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

**Ratkaisu**

Merkitään kulmakerrointa kirjaimella $k$. Lasketaan suhde

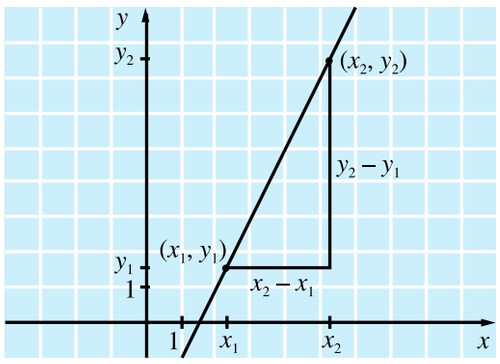
$$k = \frac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}}.$$

a)




$$k = \frac{7-1}{5-2} = \frac{6}{3} = 2$$

b)




$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**Vastaus**

a) 2 b) $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

### Kulmakertoimen laskukaava

Jos suora kulkee pisteiden $(x_1, y_1)$ ja $(x_2, y_2)$ kautta, missä $x_1 \neq x_2$, niin suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Kulmakerroin on siis pisteiden $y$-koordinaattien erotuksen suhde $x$-koordinaattien erotukseen.

Jos suora kulkee pisteiden $(x_1, y_1)$ ja $(x_2, y_2)$ kautta ja $x_1 = x_2$, suora on $y$-akselin suuntainen. $y$-akselin suuntaisella suoralla ei ole kulmakerrointa.

## ESIMERKKI 2

Suora kulkee pisteiden a) $(-18, 23)$ ja $(13, 19)$ b) $(-45, 89)$ ja $(67, 89)$ kautta. Määritä suoran kulmakerroin. Onko suora nouseva, laskeva vai $x$- tai $y$-akselin suuntainen?

### Ratkaisu

a) Käytetään kulmakertoimen kaavaa.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sijoitetaan pisteiden $(-18, 23)$ ja $(13, 19)$ $y$-koordinaatit $y_2 = 19$, $y_1 = 23$ ja $x$-koordinaatit $x_2 = 13$, $x_1 = -18$.*

$$= \frac{19 - 23}{13 - (-18)} = \frac{-4}{31} = -\frac{4}{31}$$

Koska kulmakerroin on negatiivinen, suora on laskeva.

---

* Voitaisiin sijoittaa koordinaattien erotukset myös toisin päin: $y_2 = 23$, $y_1 = 19$ ja $x_2 = -18$, $x_1 = 13$, jolloin

$$k = \frac{23 - 19}{-18 - 13} = \frac{4}{-31} = -\frac{4}{31}.$$

b) Pisteiden $(-45, 89)$ ja $(67, 89)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{89 - 89}{67 - (-45)} = 0.$$

Koska kulmakerroin on 0, suora on $x$-akselin suuntainen.

**Vastaus**

a) $-\frac{4}{31}$, suora on laskeva.

b) 0, suora on $x$-akselin suuntainen.

## ESIMERKKI 3

Suora $s_1$ kulkee pisteiden $(-1, 3)$ ja $(4, 6)$ kautta ja suora $s_2$ pisteiden $(0, -3)$ ja $(10, 3)$ kautta. Ovatko suorat yhdensuuntaiset?

**Ratkaisu**

Lasketaan suorien kulmakertoimet.

suora $s_1$: $k_1 = \frac{6 - 3}{4 - (-1)} = \frac{3}{5}$

suora $s_2$: $k_2 = \frac{3 - (-3)}{10 - 0} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Koska kulmakertoimet ovat yhtä suuret, suorat ovat yhdensuuntaiset.

**Vastaus**

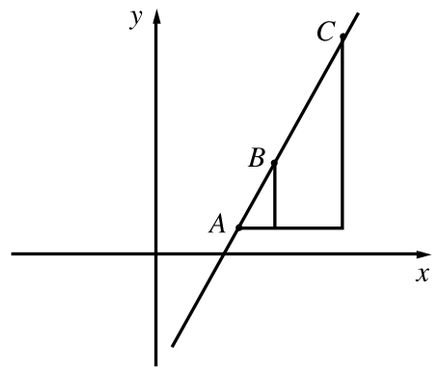
Ovat.

## ESIMERKKI 4

Onko piste $C(100, 4175)$ pisteiden $A(25, 1925)$ ja $B(40, 2375)$ kautta kulkevalla suoralla?

### Ratkaisu

Lasketaan pisteiden $A$ ja $B$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin ja pisteiden $A$ ja $C$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin. Piste $C$ on pisteiden $A$ ja $B$ kautta kulkevalla suoralla, jos ja vain jos kulmakertoimet ovat yhtä suuret.




Pisteiden $A(25, 1925)$ ja $B(40, 2375)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$\frac{2375 - 1925}{40 - 25} = \frac{450}{15} = 30.$$

Pisteiden $A(25, 1925)$ ja $C(100, 4175)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$\frac{4175 - 1925}{100 - 25} = \frac{2250}{75} = 30.$$

Koska kulmakertoimet ovat yhtä suuret, piste $C$ on pisteiden $A$ ja $B$ kautta kulkevalla suoralla.

### Vastaus

On.

## TEHTÄVIÄ

### SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**146.** Suora kulkee pisteiden
a) $(2, 1)$ ja $(1, 0)$
b) $(-5, 0)$ ja $(3, -2)$
kautta. Laske suoran kulmakerroin.

**147.** Suora kulkee pisteiden
a) $(-1, 1)$ ja $(5, 1)$
b) $(-6, 0)$ ja $(3, 3)$
c) $(-6, 3)$ ja $(0, -1)$
d) $(-3, 0)$ ja $(-3, 5)$
kautta. Laske suoran kulmakerroin ja ilmoita, onko suora nouseva, laskeva vai $x$- tai $y$-akselin suuntainen.

**148.** Suora $s_1$ kulkee pisteiden $(10, 473)$ ja $(-1, 11)$ kautta ja suora $s_2$ kulkee pisteiden $(-10, -451)$ ja $(120, 5090)$ kautta. Ovatko suorat $s_1$ ja $s_2$ yhdensuuntaiset?

**149.** Suora kulkee pisteen $(-1, 6)$ kautta ja suoran kulmakerroin on 3. Onko piste
a) $(13, 49)$ b) $(-12, -27)$ suoralla?

**150.** Suora kulkee pisteiden
a) $(-1, 3)$ ja $(8, 15)$
b) $(1, 2)$ ja $(8, -3)$
kautta. Määritä suoran suuntakulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.

**151.** Nelikulmion $OABC$ kärki $O$ on origossa, ja muut kärjet ovat $A(\frac{4}{3}, \frac{7}{12})$, $B(1, \frac{7}{3})$ ja $C(-\frac{1}{3}, \frac{7}{4})$. Onko nelikulmio $OABC$ suunnikas?

**152.** Määritä sellainen vakion $a$ arvo, että pisteiden $(3, a)$ ja $(5, 7)$ kautta kulkeva suora on yhdensuuntainen pisteiden $(-1, 4)$ ja $(8, 0)$ kautta kulkevan suoran kanssa.

**153.** Samaa geometrista ongelmaa voi usein tutkia eri menetelmillä: perinteisillä geometrisilla menetelmillä ilman koordinaatistoa (kurssi Geometria), vektorien avulla (kurssi Vektorit) tai analyyttisen geometrian keinoin sijoittamalla kuvio koordinaatistoon. Todista kulmakertoimien avulla: Kolmion kahden sivun keskipisteitä yhdistävä jana on kolmannen sivun suuntainen. (Ohje: Merkitse kärkipisteitä yleisin merkinnöin, ja laske kulmakertoimet.)

### SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**154.** Suora kulkee pisteiden
a) $(-5, 1)$ ja $(-3, -2)$
b) $(0, -6)$ ja $(12, 0)$ kautta.
Laske suoran kulmakerroin.

**155.** Suora kulkee pisteiden

a) $(\frac{1}{2}, 3)$ ja $(2, 0)$

b) $(-1, \frac{1}{3})$ ja $(-\frac{1}{2}, 0)$

kautta. Laske suoran kulmakerroin.

**156.** Suora kulkee ympyröiden $x^2 + y^2 + 8x - 12y + 26 = 0$ ja $x^2 + y^2 + 16y = 0$ keskipisteiden kautta. Mikä suoran kulmakerroin on?

**157.** Kartan koordinaatistossa toisen lentokoneen lentoreitti kulkee suoraviivaisesti pisteiden $(-15, 3)$ ja $(0, 9)$ kautta ja toisen lentokoneen reitti pisteiden $(0, -12)$ ja $(6, -9)$ kautta. Leikkaavatko lentoreitit toisensa?

**158.** Suora kulkee pisteen $(5, 3)$ kautta, ja suoran kulmakerroin on $-\frac{2}{3}$. Onko piste

a) $(-13, 15)$ b) $(21, -8)$ suoralla?

**159.** Suora $s_1$ kulkee pisteiden $(0, 3)$ ja $(2, -1)$ kautta ja suora $s_2$ pisteiden $(-5, 0)$ ja $(4, 3)$ kautta. Määritä asteen tarkkuudella

a) suorien $s_1$ ja $s_2$ suuntakulmat

b) suorien $s_1$ ja $s_2$ välisen kulman suuruus.

**160.** Millä $c$:n arvolla piste $(17, c)$ on pisteiden $(-2, -3)$ ja $(2, 6)$ kautta kulkevalla suoralla?

**161.** Nelikulmion $ABCD$ kärkipiste $A$ on $y$-akselilla, ja muut kärkipisteet ovat $B(-5, -11)$, $C(4, 0)$ ja $D(7, 12)$. Määritä kärkipiste $A$ niin, että nelikulmio $ABCD$ on puolisuunnikas.

**162.** Kun nelikulmion viereisten sivujen keskipisteet yhdistetään janoilla, muodostuu uusi nelikulmio. Todista, että muodostuva nelikulmio on alkuperäisen nelikulmion muodosta riippumatta aina suunnikas.

**163.** Kolmion kärjet ovat pisteissä $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ja $C(x_3, y_3)$.

a) Osoita kulmakertoimien avulla, että kärjen $A$ ja vastakkaisen sivun $BC$ keskipisteen $M$ kautta kulkeva suora kulkee pisteen

$P\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ kautta.

b) Perustele ilman enempiä laskuja, että kolmion $ABC$ kaikki mediaanit (keskijanat) kulkevat pisteen $P$ kautta. Mediaanien leikkauspiste on yksi kolmion ns. *merkillisistä pisteistä.** Erityisesti se on kolmion *painopiste* eli piste, josta tuettuna tasapaksu kolmion muotoinen levy pysyy tasapainossa.

c) Kolmion kärkipisteet ovat origo, $(6, 0)$ ja $(0, 8)$. Mikä kolmion painopiste on?

---

* Muita kolmion merkillisiä pisteitä ovat korkeusjanojen leikkauspiste, kulmanpuolittajien leikkauspiste ja sivujen keskinormaalien leikkauspiste.

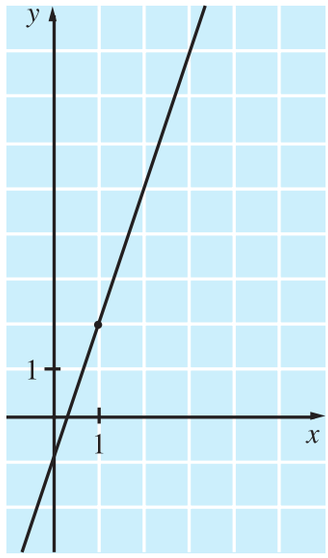
# Suoran yhtälö

**Ongelma**

Suora kulkee pisteen $(1, 2)$ kautta, ja suoran kulmakerroin on $3$.

a) Osoita, että piste $(2{,}3;\ 5{,}9)$ on suoralla.

b) Millä ehdolla piste $(x, y)$ on suoralla?




## JOHDANTOESIMERKKI 1

Muodosta yhtälö suoralle, joka

a) kulkee pisteen $(1, 3)$ kautta ja jonka kulmakerroin on $2$

b) kulkee pisteen $(x_0, y_0)$ kautta ja jonka kulmakerroin on $k$.

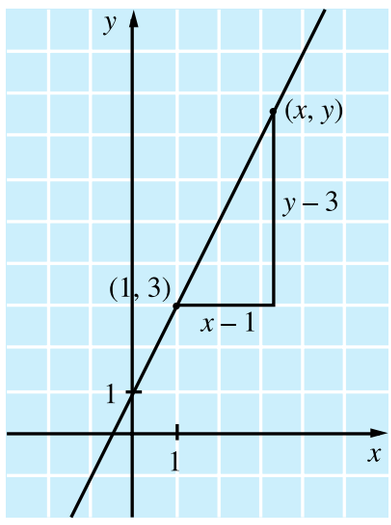
**Ratkaisu**

a) Piste $(x, y)$, jonka $x$-koordinaatti ei ole $1$, on suoralla, jos ja vain jos pisteitä $(1, 3)$ ja $(x, y)$ yhdistävän janan kulmakerroin on $2$:

$$\frac{y-3}{x-1} = 2$$

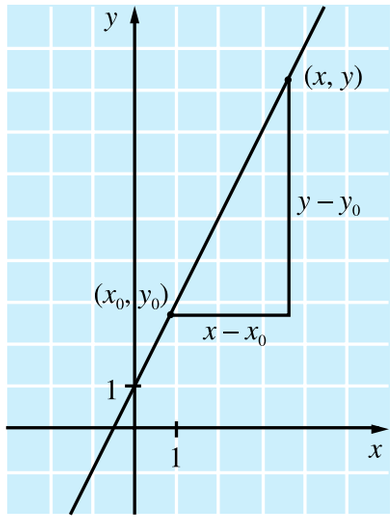
Kun yhtälön molemmat puolet kerrotaan nimittäjällä $x - 1$, saadaan yhtälö, jonka toteuttaa myös piste $(1, 3)$.

$$y - 3 = 2(x - 1)$$



b) Piste $(x, y)$, jonka $x$-koordinaatti ei ole $x_0$, on suoralla, jos ja vain jos pisteitä $(x_0, y_0)$ ja $(x, y)$ yhdistävän janan kulmakerroin on $k$:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = k$$




Kun yhtälön molemmat puolet kerrotaan nimittäjällä $x - x_0$, saadaan yhtälö, jonka toteuttaa myös piste $(x_0, y_0)$.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

**Vastaus** a) $y - 3 = 2(x - 1)$ b) $y - y_0 = k(x - x_0)$

### Suoran yhtälön muodostaminen

Jos suora kulkee pisteen $(x_0, y_0)$ kautta ja suoran kulmakerroin on $k$, niin suoran yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Kaavan avulla voidaan muodostaa suoran yhtälö, jos suoralla on kulmakerroin eli jos suora ei ole $y$-akselin suuntainen.

Kaavalla muodostettu suoran yhtälö sievennetään usein muotoon, jossa $y$ on ilmaistu $x$:n lausekkeena. Sievennys havainnollistuu seuraavassa esimerkissä.

## ESIMERKKI 2

Muodosta yhtälö suoralle, joka
a) kulkee pisteen $(2, -4)$ kautta ja jonka kulmakerroin on $-\frac{1}{3}$
b) kulkee pisteiden $(-1, -3)$ ja $(4, 7)$ kautta.
c) Tutki, onko piste $(17, 33)$ b-kohdan suoralla.

**Ratkaisu**

a) Yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$ sijoitetaan suoran kulmakerroin ja suoralla olevan pisteen koordinaatit.

$y - y_0 = k(x - x_0)$ — Sijoitetaan suoran kulmakerroin $k = -\frac{1}{3}$ ja pisteen $(2, -4)$ koordinaatit $x_0 = 2$, $y_0 = -4$.

$$y - (-4) = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

$y + 4 = -\frac{1}{3}(x - 2)$ — Ratkaistaan yhtälöstä $y$.

$$y + 4 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} - 4$$

$y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$ — Muuttujan $x$ kerroin on suoran kulmakerroin $-\frac{1}{3}$.

b) Pisteiden $(-1, -3)$ ja $(4, 7)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{7 - (-3)}{4 - (-1)} = \frac{10}{5} = 2.$$ $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$ sijoitetaan suoran kulmakerroin ja jommankumman pisteen koordinaatit.

$y - y_0 = k(x - x_0)$ — Sijoitetaan kulmakerroin $k = 2$ ja pisteen $(4, 7)$ koordinaatit $x_0 = 4$ ja $y_0 = 7$.

$$y - 7 = 2(x - 4)$$

$y - 7 = 2x - 8$ — Ratkaistaan $y$.

$y = 2x - 1$ — Muuttujan $x$ kerroin on suoran kulmakerroin 2.

c) Tutkitaan, toteuttavatko pisteen $(17, 33)$ koordinaatit b-kohdassa muodostetun yhtälön.

$y = 2x - 1$ Sijoitetaan pisteen $(17, 33)$ koordinaatit $x = 17,\ y = 33$.

$33 = 2 \cdot 17 - 1$

$33 = 33$

tosi

Koska pisteen $(17, 33)$ koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön, piste on suoralla.

**Vastaus** a) $y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$ b) $y = 2x - 1$ c) On.

### Yhtälö $y = kx + b$

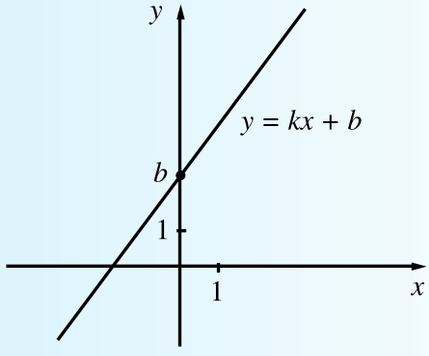
Oletetaan, että suoralla on kulmakerroin eli suora ei ole $y$-akselin suuntainen. Kun suoran yhtälöstä ratkaistaan $y$, yhtälö tulee muotoon

$$y = kx + b.$$

Yhtälöä sanotaan suoran yhtälön *ratkaistuksi muodoksi*.

Yhtälössä

- muuttujan $x$ kerroin on suoran kulmakerroin
- vakiotermi $b$ on suoran ja $y$-akselin leikkauspisteen $y$-koordinaatti.



**Perustelu**

Ratkaistaan $y$ yhtälöstä $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$y - y_0 = k(x - x_0)$

$y - y_0 = kx - kx_0$

$y = kx - kx_0 + y_0$

Siis yhtälön ratkaistussa muodossa muuttujan $x$ kerroin on suoran kulmakerroin $k$.

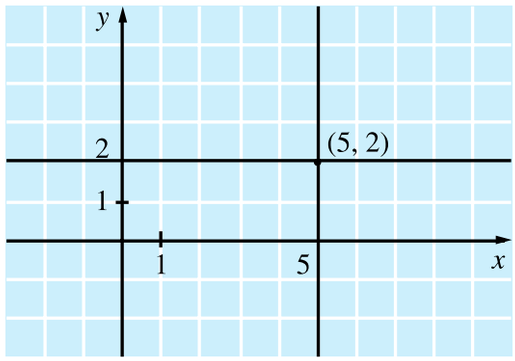
Sijoitetaan yhtälöön $y = kx + b$ $x$:n arvo $0$.

$y = k \cdot 0 + b = b$

Siis suora kulkee $y$-akselin pisteen $(0, b)$ kautta.

## JOHDANTOESIMERKKI 3

Muodosta pisteen $(5, 2)$ kautta kulkevan
a) $x$-akselin suuntaisen suoran yhtälö
b) $y$-akselin suuntaisen suoran yhtälö.




**Ratkaisu**

a) $x$-akselin suuntaisen suoran yhtälö voidaan muodostaa kahdella tavalla.

*Tapa 1.* Käytetään suoran yhtälön kaavaa.

$x$-akselin suuntaisen suoran kulmakerroin on $0$.

$y - y_0 = k(x - x_0)$

Sijoitetaan kulmakerroin $k = 0$ ja pisteen $(5, 2)$ koordinaatit $x_0 = 5$, $y_0 = 2$.

$y - 2 = 0 \cdot (x - 5)$

$y - 2 = 0$

$y = 2$

*Tapa 2.* Päätellään yhtälö suoraan: Piste $(x, y)$ on pisteen $(5, 2)$ kautta kulkevalla $x$-akselin suuntaisella suoralla, jos ja vain jos pisteen $y$-koordinaatti on $2$, eli

$y = 2$.

b) $y$-akselin suuntaisella suoralla ei ole kulmakerrointa, joten suoran yhtälön kaavaa $y - y_0 = k(x - x_0)$ ei voida käyttää. Yhtälö päätellään suoraan: Piste $(x, y)$ on pisteen $(5, 2)$ kautta kulkevalla $y$-akselin suuntaisella suoralla, jos ja vain jos pisteen $x$-koordinaatti on $5$, eli

$x = 5$.

**Vastaus** a) $y = 2$ b) $x = 5$

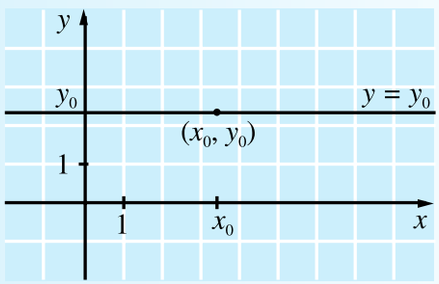
## Koordinaattiakselien suuntaisten suorien yhtälöt

### $x$-akselin suuntainen suora

Pisteen $(x_0, y_0)$ kautta kulkevan $x$-akselin suuntaisen suoran yhtälö on

$$y = y_0.$$

Yhtälön voi muodostaa niin, että kaavaan $y - y_0 = k(x - x_0)$ sijoitetaan $k = 0$. Yhtälön voi muodostaa myös päättelemällä: Piste $(x, y)$ on suoralla, jos ja vain jos pisteen $y$-koordinaatti on $y_0$.

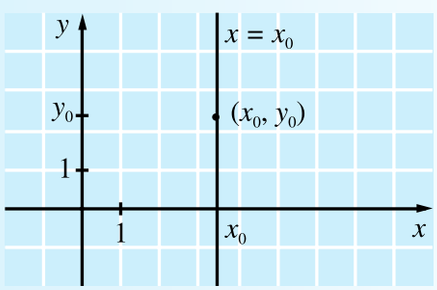



### $y$-akselin suuntainen suora

Pisteen $(x_0, y_0)$ kautta kulkevan $y$-akselin suuntaisen suoran yhtälö on

$$x = x_0.$$

Yhtälö muodostetaan päättelemällä: Piste $(x, y)$ on suoralla, jos ja vain jos pisteen $x$-koordinaatti on $x_0$.

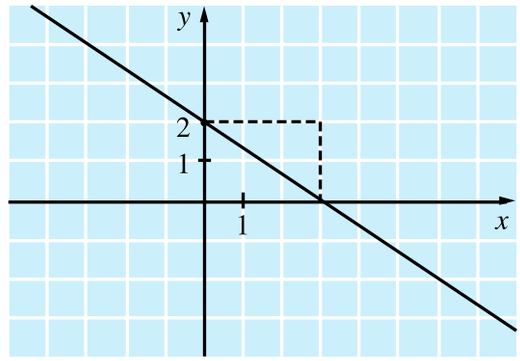


## ESIMERKKI 4

Piirrä suora a) $y = -\frac{2}{3}x + 2$ b) $2x + 1 = 0$.

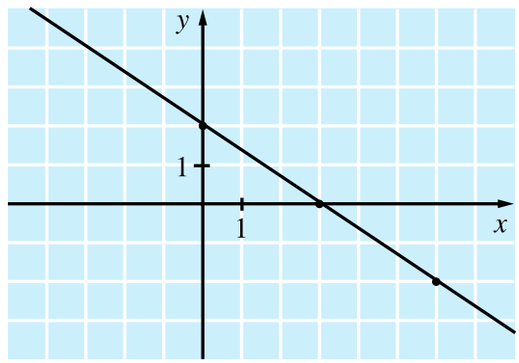
### Ratkaisu

*Tapa 1.* Suora $y = -\frac{2}{3}x + 2$ leikkaa $y$-akselin pisteessä $(0, 2)$. Suoran kulmakerroin on $-\frac{2}{3}$, joten suora on laskeva ja $y$-koordinaatti vähenee kaksi yksikköä aina, kun $x$-koordinaatti kasvaa kolme yksikköä.




*Tapa 2.* Määritetään suoran $y = -\frac{2}{3}x + 2$ pisteitä niin, että annetaan $x$:lle sopivia arvoja ja lasketaan vastaavat $y$:n arvot.*

| $x$ | $y = -\frac{2}{3}x + 2$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | $-\frac{2}{3} \cdot 0 + 2 = 2$ | $(0, 2)$ |
| 3 | $-\frac{2}{3} \cdot 3 + 2 = 0$ | $(3, 0)$ |
| 6 | $-\frac{2}{3} \cdot 6 + 2 = -2$ | $(6, -2)$ |

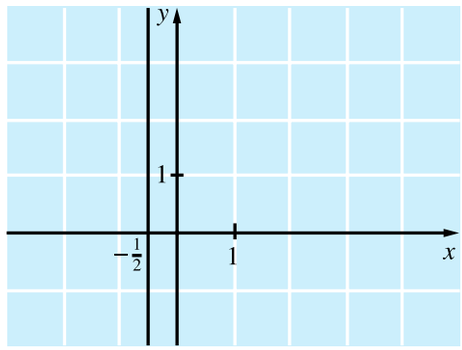



* Suoraa $y = -\frac{2}{3}x + 2$ piirrettäessä $x$:n arvoiksi kannattaa valita kolmella jaollisia kokonaislukuja. Jo kaksi pistettä määrää suoran, mutta varmistukseksi kannattaa laskea myös kolmas piste. Jos lasketut kolme pistettä eivät ole samalla suoralla, jossain on laskuvirhe.

b) Suoralla $2x + 1 = 0$ ei ole ratkaistua muotoa $y = kx + b$. Ratkaistaan yhtälöstä $x$.

$$2x + 1 = 0$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

Suora on pisteen $(-\frac{1}{2}, 0)$ kautta kulkeva $y$-akselin suuntainen suora.




## ESIMERKKI 5

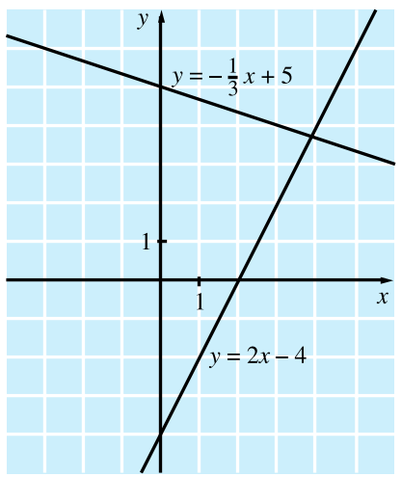
Missä pisteessä suorat $y = 2x - 4$ ja $y = -\frac{1}{3}x + 5$ leikkaavat toisensa?

Kuinka suuri suorien ja $y$-akselin rajaaman kolmion pinta-ala on?

### Ratkaisu

Piirretään suorat.*

Suorien $y = 2x - 4$ ja $y = -\frac{1}{3}x + 5$ leikkauspisteen $x$-koordinaatti saadaan selville, kun ratkaistaan, millä muuttujan $x$ arvolla lausekkeiden $2x - 4$ ja $-\frac{1}{3}x + 5$ arvot ovat yhtä suuret.




---

* Suora $y = 2x - 4$ kulkee $y$-akselin pisteen $(0, -4)$ kautta, ja $y$-koordinaatti kasvaa kaksi yksikköä aina, kun $x$-koordinaatti kasvaa yhden yksikön.

Suora $y = -\frac{1}{3}x + 5$ kulkee $y$-akselin pisteen $(0, 5)$ kautta, ja $y$-koordinaatti pienenee yhden yksikön aina, kun $x$-koordinaatti kasvaa kolme yksikköä.

$2x - 4 = -\frac{1}{3}x + 5 \qquad | \cdot 3$ Kerrotaan nimittäjä pois.

$6x - 12 = -x + 15$

$7x = 27 \qquad | : 7$

$x = \frac{27}{7}$

Suorien leikkauspisteen $x$-koordinaatti on $\frac{27}{7} = 3\frac{6}{7}$.

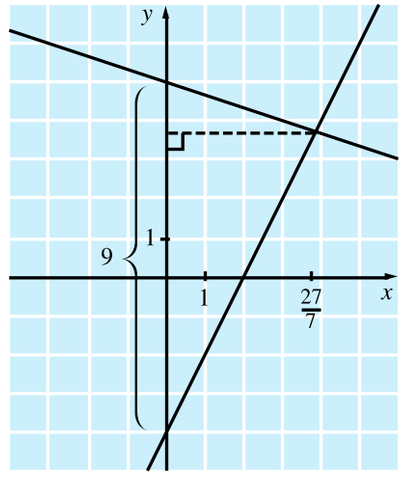
Leikkauspisteen $y$-koordinaatti saadaan sijoittamalla $x$-koordinaatti kumpaan tahansa suoran yhtälöön.

$y = 2 \cdot \frac{27}{7} - 4 = \frac{54}{7} - \frac{28}{7} = \frac{26}{7}$ Yhtälöön $y = 2x - 4$ on sijoitettu $x = \frac{27}{7}$.

Leikkauspisteen $y$-koordinaatti on $\frac{26}{7} = 3\frac{5}{7}$.

Suorien leikkauspiste on $(3\frac{6}{7}, 3\frac{5}{7})$.

Suorien ja $y$-akselin rajaaman kolmion kannaksi valitaan suorien $y$-akselista erottama jana. Kolmion korkeus on silloin sama kuin leikkauspisteen $x$-koordinaatti $\frac{27}{7}$. Suorat leikkaavat $y$-akselin pisteissä $(0, -4)$ ja $(0, 5)$, joten kolmion kannan pituus on $5 - (-4) = 9$.




Kolmion pinta-ala on

$A = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{27}{7} = \frac{243}{14} = 17\frac{5}{14}$.

**Vastaus** leikkauspiste $(3\frac{6}{7}, 3\frac{5}{7})$, kolmion pinta-ala $17\frac{5}{14}$

## TEHTÄVIÄ

### SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**164.** Muodosta suoran yhtälö, kun suora
a) kulkee pisteen $(2, 5)$ kautta ja suoran kulmakerroin on $\frac{1}{3}$
b) kulkee pisteiden $(-1, 11)$ ja $(1, 3)$ kautta.

**165.** Mikä on sen origon kautta kulkevan suoran yhtälö, jonka kulmakerroin on
a) $-3$ b) $2{,}5$ c) $k$?

**166.** Muodosta yhtälö pisteen $(6, -5)$ kautta kulkevalle suoralle, joka on
a) $x$-akselin suuntainen
b) $y$-akselin suuntainen
c) suoran $y = 3x - 9$ suuntainen.

**167.** Piirrä suora.
a) $y = -2x - 1$
b) $y = \frac{3}{5}x + 2$
c) $y = -3$
d) $x + 6 = 0$

**168.** Suora kulkee pisteiden $(1, -3)$ ja $(-5, 4)$ kautta.
a) Muodosta suoran yhtälö.
b) Onko piste $(-35, 39)$ suoralla?
c) Missä pisteissä suora leikkaa koordinaattiakselit?

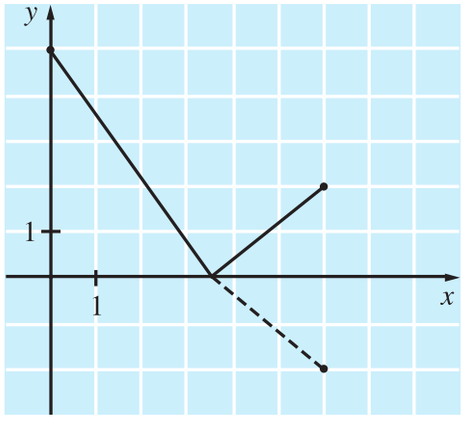
**169.** Missä pisteessä suorat $y = \frac{1}{6}x + 2$ ja $y = -\frac{1}{3}x - 1$ leikkaavat toisensa?

**170.** Laske sen kolmion pinta-ala, jonka rajaavat suorat $y = x + 10$ ja $y = -3x - 6$ sekä
a) $y$-akseli b) $x$-akseli.

**171.** Kartan koordinaatistossa sähkölinja on suora, joka kulkee pisteen $(-3, 1)$ kautta ja jonka kulmakerroin on $-\frac{2}{3}$. Missä pisteessä sähkölinja leikkaa suoran a) $x = -2$ b) $y = 6$?

**172.** Erään käsityksen mukaan 165 cm pitkän miehen ”ihannepaino” on 55 kg ja 180 cm pitkän 75 kg. Oletetaan, että kun pituus on yli 160 cm, niin ihannepainon $y$ riippuvuutta pituudesta $x$ voidaan kuvata ns. *lineaarisella mallilla* eli suoralla. Piirrä riippuvuutta kuvaava suora ja muodosta sen yhtälö. Laske mallin avulla:
a) Mikä on 195 cm pitkän miehen ”ihannepaino”?
b) Mikä on 120 kg painavan miehen ”ihannepituus”?

**173.** Pisteestä $(0, 5)$ on kuljettava pisteeseen $(6, 2)$ niin, että matkalla käydään $x$-akselilla. Lyhin mahdollinen kulkureitti voidaan löytää käyttämällä hyväksi oivallusta: Piste $(6, 2)$ peilataan $x$-akselin suhteen ja määritetään lyhin reitti pisteestä $(0, 5)$ peilikuvapisteeseen. Mikä on lyhin reitti $x$-akselin kautta pisteestä $(0, 5)$ pisteeseen $(6, 2)$? Kuinka pitkä lyhin reitti on?



## SARJA II.
## PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**174.** Muodosta suoran yhtälö, kun suora
a) kulkee pisteen $(-6, 8)$ kautta ja suoran kulmakerroin on $-\frac{5}{4}$
b) kulkee origon kautta ja suoran kulmakerroin on $\frac{7}{11}$.

**175.** Suora kulkee pisteiden
a) $(1, 0)$ ja $(-1, 6)$
b) $(6, 3)$ ja $(-7, 3)$
c) $(-5, 9)$ ja $(-5, 1)$
kautta. Muodosta suoran yhtälö.

**176.** Suora kulkee ympyrän $x^2 + y^2 - x + 3y - 4 = 0$ keskipisteen ja pisteen $(-2, 1)$ kautta. Muodosta suoran yhtälö.

**177.** Piirrä suora.
a) $y = -x - 4$ b) $y = \frac{3}{2}x + 3$
c) $y = 4$

**178.** a) Suora $y = kx + 18$ kulkee pisteen $(-1, 2)$ kautta. Määritä kulmakerroin $k$.
b) Suora $y = 4x + b$ kulkee pisteen $(-2, 3)$ kautta. Määritä yhtälön vakiotermi $b$.

**179.** Kolmion kärjet ovat pisteissä $A(-2, 0)$, $B(4, 7)$ ja $C(-2, 4)$. Suora kulkee kolmion kärjen $A$ kautta ja puolittaa kolmion vastakkaisen sivun. Mikä suoran yhtälö on?

**180.** Määritä pisteiden $(-3, 1)$ ja $(6, 4)$ kautta kulkevan suoran ja
a) $y$-akselin b) $x$-akselin
c) suoran $y = -\frac{3}{2}x$
leikkauspiste.

**181.** Metsäaluetta rajaavat kartan koordinaatiston $x$-akseli sekä suorat $y = \frac{4}{3}x + 8$ ja $y = -2x + 5$. Kuinka suuri metsäalueen pinta-ala on? Koordinaatiston yksikkö vastaa 200 metriä luonnossa. Anna vastaus hehtaareina hehtaarin tarkkuudella.

**182.** Sampsa muisti, että celsiusasteikon nollapistettä vastaa fahrenheitasteikon lukema 32 ja veden kiehumispistettä lukema 212. Lisäksi Sampsa muisti, että lämpötila-asteikkojen yhteyttä voidaan kuvata suoralla.
a) Muodosta Sampsan muistitietojen perusteella yhtälö, jonka avulla voi muuttaa fahrenheitasteita celsiusasteiksi.
b) Ray Bradburyn kirja Fahrenheit 451 on saanut nimensä paperin syttymispisteen mukaan. Käännä teoksen nimi celsiusasteikolle.
c) Mitä fahrenheitasteikon lukemaa vastaa kireän pakkasen raja $-25\ ^\circ\text{C}$?

**183.** Suora, jonka kulmakerroin on $-2$, rajoittaa yhdessä koordinaattiakselien kanssa kolmion, jonka pinta-ala on 9. Määritä suoran yhtälö.

**184.** Suorat $y = 2x + 4$ ja $y = -x$ erottavat jokaisesta $y$-akselin suuntaisesta suorasta janan. Minkä käyrän janojen keskipisteet muodostavat?

**185.** Määritä pisteen $(2, 6)$ kautta kulkevat
a) laskevat b) nousevat suorat, jotka yhdessä koordinaattiakselien kanssa rajaavat kolmion, jonka pinta-ala on 25.

# Yhtälö $Ax + By + C = 0$

**ESIMERKKI 1**

Mitä pistejoukkoa yhtälö $4x - 3y - 9 = 0$ esittää? Piirrä pistejoukko.

**Ratkaisu**

Ratkaistaan yhtälöstä $y$.

$$4x - 3y - 9 = 0$$

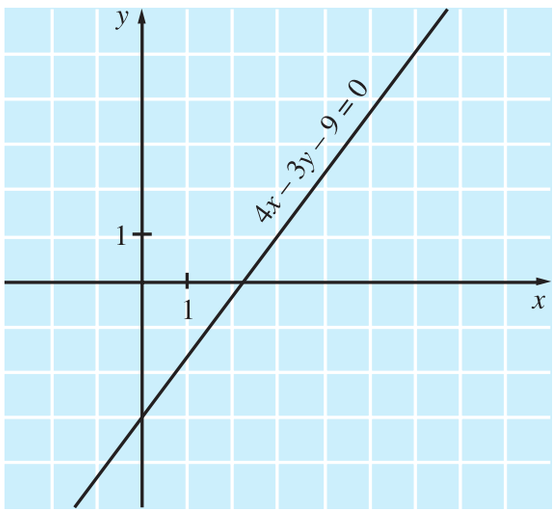
$$-3y = -4x + 9 \qquad \big| : (-3) \qquad \text{Jaetaan termeittäin.}$$

$$y = \frac{-4x}{-3} + \frac{9}{-3}$$

$$y = \frac{4}{3}x - 3$$

Yhtälö esittää suoraa.

Suora leikkaa $y$-akselin pisteessä $(0, -3)$ ja suoran kulmakerroin on $\frac{4}{3}$.




**Vastaus**

suoraa $y = \frac{4}{3}x - 3$

## Yhtälö $Ax + By + C = 0$

Yhtälö $Ax + By + C = 0$, jossa ainakin toinen kertoimista $A$ ja $B$ on eri suuri kuin nolla, esittää suoraa.

Yhtälöä $Ax + By + C = 0$ kutsutaan suoran yhtälön *yleiseksi muodoksi*, koska jokaisen suoran – myös $y$-akselin suuntaisen suoran – yhtälö voidaan saattaa tällaiseen muotoon.*

### Perustelu

Osoitetaan, että jos yhtälössä $Ax + By + C = 0$ ainakin toinen kertoimista $A$ ja $B$ on eri suuri kuin nolla, niin yhtälö esittää suoraa.

Oletetaan, että $B \neq 0$. Ratkaistaan yhtälöstä $y$.

$$Ax + By + C = 0$$

$$By = -Ax - C \quad \big| : B \qquad \text{Voidaan jakaa } B\text{:llä, koska } B \neq 0.$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Yhtälö on muotoa $y = kx + b$, missä $k = -\frac{A}{B}$ ja $b = -\frac{C}{B}$. Siis yhtälö on suoran yhtälö.

Oletetaan, että $B = 0$. Tällöin on $A \neq 0$. Kun yhtälöstä $Ax + C = 0$ ratkaistaan $x$, yhtälö tulee muotoon

$$x = -\frac{C}{A}.$$

Yhtälö on $y$-akselin suuntaisen suoran yhtälö.

Kun tehtävänä on muodostaa suoran yhtälö, vastaukseksi voidaan antaa joko yhtälön ratkaistu muoto tai yleinen muoto.

---

* Muotoa kutsutaan myös suoran yhtälön *normaalimuodoksi*. Tämän nimityksen tausta havaitaan kurssissa Vektorit.

## ESIMERKKI 2

Suora kulkee pisteen $(-3, 7)$ kautta, ja suoran kulmakerroin on $-\frac{5}{6}$. Muodosta suoran yleisessä muodossa oleva yhtälö.

**Ratkaisu** Käytetään suoran yhtälön kaavaa.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Sijoitetaan $k = -\frac{5}{6}$ ja pisteen $(-3, 7)$ koordinaatit $x_0 = -3$ ja $y_0 = 7$.

$$y - 7 = -\frac{5}{6}(x - (-3))$$

$$y - 7 = -\frac{5}{6}(x + 3) \qquad \big| \cdot 6$$

Poistetaan nimittäjä, jolloin yhtälön yleinen muoto on yksinkertaisempi.

$$6(y - 7) = -5(x + 3)$$

$$6y - 42 = -5x - 15$$

$$5x + 6y - 27 = 0$$

Yleinen muoto $Ax + By + C = 0$.

**Vastaus** $5x + 6y - 27 = 0$

## ESIMERKKI 3

Missä pisteessä suora $4x - 6y + 16 = 0$ leikkaa koordinaattiakselit?

**Ratkaisu**

Suoran ja $y$-akselin leikkauspisteessä $x$-koordinaatti on $0$.
Sijoitetaan suoran yhtälöön $x = 0$ ja ratkaistaan $y$-koordinaatti.

$$4 \cdot 0 - 6y + 16 = 0$$

$$-6y = -16 \qquad | : (-6)$$

$$y = \frac{-16}{-6} = \frac{8}{3}$$

Suora leikkaa $y$-akselin pisteessä $(0, \frac{8}{3})$.

Suoran ja $x$-akselin leikkauspisteessä $y$-koordinaatti on $0$.
Sijoitetaan suoran yhtälöön $y = 0$ ja ratkaistaan $x$-koordinaatti.

$$4x - 6 \cdot 0 + 16 = 0$$

$$4x = -16 \qquad | : 4$$

$$x = -4$$

Suora leikkaa $x$-akselin pisteessä $(-4, 0)$.

**Vastaus**

$y$-akselin pisteessä $(0, \frac{8}{3})$ ja $x$-akselin pisteessä $(-4, 0)$.

## ESIMERKKI 4

Missä sijaitsevat tason pisteet, joiden koordinaatit toteuttavat epäyhtälön $2x - y - 1 < 0$?

**Ratkaisu**

Ratkaistaan epäyhtälöstä $y$.

$$2x - y - 1 < 0$$

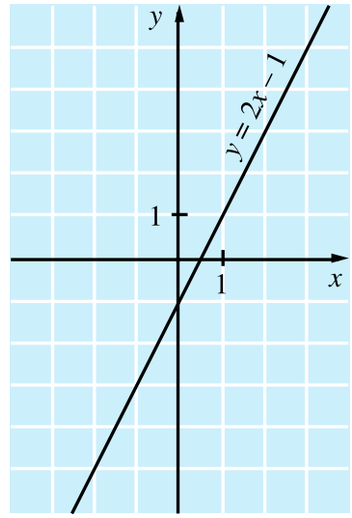
$$-y < -2x + 1 \qquad | : (-1)$$

Koska jakaja on negatiivinen, epäyhtälön suunta vaihtuu.

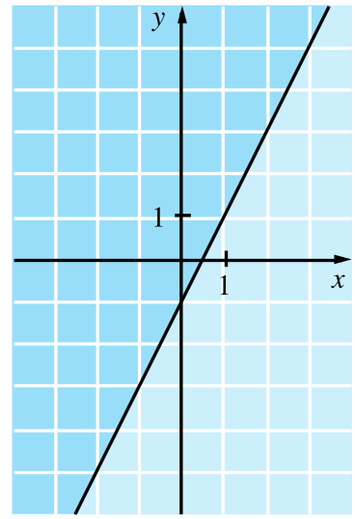
$$y > 2x - 1$$

Pisteet, joiden koordinaatit toteuttavat yhtälön $y = 2x - 1$, sijaitsevat suoralla, jonka kulmakerroin on $2$ ja joka leikkaa $y$-akselin pisteessä $(0, -1)$.

Kun koordinaatistossa siirrytään $y$-akselin suuntaisesti ylöspäin, $y$-koordinaatti suurenee ja $x$-koordinaatti pysyy samana. Suoralla olevalla pisteellä $(x, y)$ on $y = 2x - 1$, suoran yläpuolella olevalla pisteellä $y > 2x - 1$ ja alapuolella olevalla pisteellä $y < 2x - 1$.




Epäyhtälö $y > 2x - 1$, ja siis myös epäyhtälö $2x - y - 1 < 0$, toteutuu suoran $y = 2x - 1$ yläpuolella olevassa puolitasossa.*




**Vastaus** Suoran $y = 2x - 1$ yläpuolella olevassa tason osassa.

---

* Ratkaisun voi tarkistaa niin, että epäyhtälöön sijoitetaan jonkin suoran yläpuolella olevan pisteen, esimerkiksi pisteen $(0, 1)$, koordinaatit:

$$\begin{aligned} 2x - y - 1 &< 0 \\ 2 \cdot 0 - 1 - 1 &< 0 \\ -2 &< 0 \\ &\text{tosi} \end{aligned}$$

Ratkaisun voi tarkistaa myös graafisella laskimella, jos siinä on toiminto, joka varjostaa epäyhtälön ratkaisujoukon.

## TEHTÄVIÄ

### SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**186.** Saata suoran yhtälö ratkaistuun muotoon. Mikä suoran kulmakerroin on? Missä pisteessä suora leikkaa $y$-akselin?
a) $x - y - 3 = 0$
b) $4x + 3y - 12 = 0$
c) $5y + 8 = 0$

**187.** Piirrä suorat $2x - y + 1 = 0$ ja $6x + 4y - 8 = 0$.

**188.** Muodosta yleisessä muodossa oleva yhtälö suoralle, joka
a) kulkee pisteen $(4, -5)$ kautta ja jonka kulmakerroin on $-3$
b) kulkee pisteen $(-4, -7)$ kautta ja jonka kulmakerroin on $\frac{5}{12}$.

**189.** Suora kulkee pisteen $(-3, 5)$ kautta ja on yhdensuuntainen suoran $5x + 6y + 11 = 0$ kanssa. Muodosta suoran yhtälö.

**190.** Kuinka suuri suoran $3x - 2y + 18 = 0$ ja koordinaattiakselien rajoittaman kolmion pinta-ala on?

**191.** Mitkä tason pisteet toteuttavat epäyhtälön? Piirrä kuvio.
a) $x + y - 1 < 0$
b) $2x - 3y - 6 < 0$

**192.** Millä vakion $a$ arvolla suorat $ax + y + 5 = 0$ ja $(a + 3)x - 2y - 1 = 0$ ovat yhdensuuntaiset?

**193.** a) Piirrä samaan koordinaatistoon *suoraparven* $ax - y + 1 + 2a = 0$ suoria joillakin $a$:n arvoilla. Mitä huomaat?
b) Osoita, että kaikki suoraparven $ax - y + 1 + 2a = 0$ suorat kulkevat saman pisteen kautta.

**194.** Onko piste $(297, 668)$ suoran $9x - 4y + 2 = 0$ ylä- vai alapuolella?

**195.** Minkä käyrän muodostavat pisteet $P(x, y)$, joiden pisteistä $(2, -1)$ ja $(-4, 2)$ mitattujen etäisyyksien neliöiden erotus on $15$?

### SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**196.** Saata suoran yhtälö ratkaistuun muotoon. Piirrä suora.
a) $x + y - 1 = 0$
b) $5x - 3y - 9 = 0$

**197.** Muodosta yleisessä muodossa oleva yhtälö suoralle, joka
a) kulkee pisteen $(7, -1)$ kautta ja jonka kulmakerroin on $\frac{1}{6}$
b) kulkee pisteen $(-4, 0)$ kautta ja jonka kulmakerroin on $-\frac{5}{3}$.

**198.** Suora kulkee pisteen $(1, -1)$ kautta ja on yhdensuuntainen suoran $7x - 9y + 23 = 0$ kanssa.
a) Muodosta suoran yhtälö.
b) Missä pisteissä suora leikkaa koordinaattiakselit?

**199.** Määritä suoran suuntakulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.
a) $x - 5y + 19 = 0$
b) $18x + 5y + 11 = 0$

**200.** Osoita, että seuraavasta neljästä yhtälöstä kolme on saman suoran yhtälöitä ja yksi yhtälö kuvaa eri suoraa kuin kolme muuta.
$y - 10 = -3(x + 2)$
$y + 2 = -3(x - 2)$
$y - 1 = -3(x + 1)$
$3x + y - 4 = 0$

**201.** a) Mitkä tason pisteet toteuttavat epäyhtälön $2x + y - 4 \leqslant 0$? Piirrä kuvio.
b) Piirrä se tason osa, jossa molemmat epäyhtälöt $2x + y - 4 \leqslant 0$ ja $x - y + 4 \leqslant 0$ toteutuvat.

**202.** Koordinaattiakselit erottavat epäyhtälöiden $3x - 2y + 48 \geqslant 0$ ja $2x - 3y + 30 \leqslant 0$ määräämästä alueesta nelikulmion. Kuinka suuri nelikulmion pinta-ala on?

**203.** Mitkä tason pisteet toteuttavat epäyhtälön $|2x + y| \leqslant 3$? Piirrä kuvio.

**204.** Osoita, että jokainen muotoa $ax - ay + y + 3a = 0$ oleva yhtälö esittää suoraa. Osoita edelleen, että kaikki suoraparven $ax - ay + y + 3a = 0$ suorat kulkevat saman pisteen kautta. Mikä tämä piste on?

**205.** Kuminauhan toinen pää on origossa ja toinen pää liikkuu pitkin suoraa $2x + y - 6 = 0$. Minkä käyrän kuminauhan keskipiste piirtää?

**206.** Pisteen $P(x, y)$ kautta piirretään molempien koordinaattiakselien suuntaiset suorat. Olkoon $Q$ $x$-akselin suuntaisen suoran ja suoran $y = x - 4$ leikkauspiste, ja olkoon $R$ $y$-akselin suuntaisen suoran ja suoran $y = x + 3$ leikkauspiste. Minkä käyrän muodostavat ne tason pisteet $P(x, y)$, joille pisteet $Q$ ja $R$ ovat samalla origon kautta kulkevalla suoralla? Piirrä havainnollistava kuvio.

**207.** Toisen ympyrän keskipiste on $(0, 1)$ ja säde $\sqrt{2}$, ja toisen ympyrän keskipiste on $(4, 0)$ ja säde $\sqrt{5}$. Pisteestä $P(x, y)$ piirretään tangentti kummallekin ympyrälle. Olkoot sivuamispisteet $Q$ ja $R$. Minkä käyrän muodostavat ne tason pisteet $P(x, y)$, joille janat $PQ$ ja $PR$ ovat yhtä pitkät? Piirrä havainnollistava kuvio.

# Lineaarinen yhtälöryhmä

**Ongelma**

Tutki, toteuttavatko luvut yhtälöparin

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + \ \ y = 0. \end{cases}$$

a) $x = 0,\ y = 1$ b) $x = 1,\ y = -2$ c) $x = -2,\ y = 4$

### Yhtälöryhmä

Yhtälöryhmällä tarkoitetaan useamman yhtälön ryhmää. Yhtälöryhmä merkitään yleensä aaltosulkeilla.

Muuttujien arvot toteuttavat yhtälöryhmän, jos ne toteuttavat kaikki yhtälöryhmän yhtälöt.

Yhtälöryhmä, jossa muuttujien termit ovat ensimmäistä astetta, on *lineaarinen yhtälöryhmä*.*

Luvussa Suoran yhtälö ratkaistiin suorien leikkauspisteitä tilanteissa, joissa suorien yhtälöt olivat ratkaistussa muodossa. Yleisesti kahden suoran leikkauspiste voidaan ratkaista muodostamalla ja ratkaisemalla yhtälöpari.

---

* Sana lineaarinen, joka matematiikassa usein viittaa suoraan, tulee latinan sanasta *linea*, pellavalanka, linja. Nimitys lineaarinen yhtälöryhmä tulee siitä, että kahden muuttujan yhtälöparissa, jossa muuttujien termit ovat ensimmäistä astetta (esimerkkinä ongelman yhtälöpari), yhtälöt voidaan aina tulkita suoran yhtälöiksi.

## ESIMERKKI 1

Määritä suorien $3x + 2y = -13$ ja $13x + 5y = 6$ leikkauspiste.

### Ratkaisu

Leikkauspisteen koordinaatit toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} 3x + 2y = -13 \\ 13x + 5y = 6. \end{cases}$$

Yhtälöpari ratkaistaan *eliminoimalla* toinen muuttujista niin, että saadaan yksi yhtälö, jossa on yksi muuttuja. Lineaarisessa yhtälöparissa muuttuja voidaan eliminoida seuraavalla *yhteenlaskumenetelmällä*:

Eliminoidaan muuttuja $y$.

$$\begin{cases} 3x + 2y = -13 & \mid \cdot 5 \\ 13x + 5y = 6 & \mid \cdot (-2) \end{cases}$$

Yhtälöt kerrotaan sellaisilla luvuilla, että $y$:n kertoimiksi tulevat vastaluvut.

$$\begin{cases} 15x + 10y = -65 \\ -26x - 10y = -12 \end{cases}$$

Yhtälöt lasketaan yhteen.

$$-11x = -77 \quad \mid : (-11)$$

Ratkaistaan $x$.

$$x = 7$$

$y$:n arvo voidaan ratkaista sijoittamalla saatu $x$:n arvo 7 jompaankumpaan alkuperäisistä yhtälöistä.

$3x + 2y = -13$ Sijoitetaan ensimmäiseen yhtälöön $x = 7$.

$$3 \cdot 7 + 2y = -13$$
$$2y = -13 - 21$$
$$2y = -34 \quad \mid : 2$$
$$y = -17$$

$y$:n arvo voidaan ratkaista myös eliminoimalla alkuperäisestä yhtälöparista $x$.

$$\begin{cases} 3x + 2y = -13 & \mid \cdot 13 \\ 13x + 5y = 6 & \mid \cdot (-3) \end{cases}$$

Yhtälöt kerrotaan sellaisilla luvuilla, että $x$:n kertoimiksi tulevat vastaluvut.

$$\begin{cases} 39x + 26y = -169 \\ -39x - 15y = -18 \end{cases}$$

Yhtälöt lasketaan yhteen.

$$11y = -187 \quad \mid : 11$$

Ratkaistaan $y$.

$$y = -17$$

Suorien leikkauspiste on piste $(7, -17)$*.

**Vastaus** $(7, -17)$

---

* Tulos tarkistetaan sijoittamalla $x = 7$ ja $y = -17$ yhtälöparin kumpaankin yhtälöön:

$3 \cdot 7 + 2 \cdot (-17) = -13$
$21 - 34 = -13$
$-13 = -13$
tosi

$13 \cdot 7 + 5 \cdot (-17) = 6$
$91 - 85 = 6$
$6 = 6$
tosi

## ESIMERKKI 2

Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ 3x + 2y - 2 = 0. \end{cases}$$

**Ratkaisu**

Voitaisiin siirtää ensimmäisen yhtälön termit vasemmalle puolelle, järjestää samanmuotoiset termit allekkain ja ratkaista yhtälöpari yhteenlaskumenetelmällä.

Yhtälöparista

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ 3x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

voidaan luontevasti eliminoida muuttuja $y$ myös *sijoitusmenetelmällä*. Ensimmäisessä yhtälössä on $y$ ilmaistu $x$:n lausekkeena: $y = 2x - 4$. Sijoitetaan lauseke $2x - 4$ $y$:n paikalle jälkimmäiseen yhtälöön.

$$3x + 2y - 2 = 0 \qquad \text{Sijoitetaan } y = 2x - 4.$$

$$3x + 2(2x - 4) - 2 = 0$$

$$3x + 4x - 8 - 2 = 0$$

$$7x = 10 \qquad | : 7$$

$$x = \frac{10}{7}$$

Sijoitetaan $x$:n arvo $\frac{10}{7}$ ensimmäiseen yhtälöön $y = 2x - 4$.

$$y = 2 \cdot \frac{10}{7} - 4 = \frac{20}{7} - \frac{28}{7} = -\frac{8}{7}$$

**Vastaus**

$x = \frac{10}{7}$, $y = -\frac{8}{7}$

## ESIMERKKI 3

Ratkaise yhtälöpari.

a) $\begin{cases} 21x + 18y = 7 \\ 28x + 24y = 5 \end{cases}$

b) $y = -\frac{3}{2}x + 2$ ja $3x + 2y - 4 = 0$

### Ratkaisu

a) Käytetään yhteenlaskumenetelmää ja eliminoidaan $x$.

$$\begin{cases} 21x + 18y = 7 & \mid \cdot (-28) \\ 28x + 24y = 5 & \mid \cdot 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -588x - 504y = -196 \\ 588x + 504y = 105 \end{cases}$$

$$0 = -91$$

epätosi

Yhtälöparilla ei ole ratkaisuja.*

b) Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + 2 \\ 3x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

sijoitusmenetelmällä.

---

* Tulos voidaan tulkita geometrisesti: Suorat $21x + 18y = 7$ ja $28x + 24y = 5$ eivät leikkaa toisiaan. Yhtälöiden suorat ovat siis yhdensuuntaiset, mutta eivät kuitenkaan sama suora. Tämän voi varmistaa saattamalla yhtälöt ratkaistuun muotoon:

$y = -\frac{7}{6}x + \frac{7}{18}$ ja $y = -\frac{7}{6}x + \frac{5}{24}$.

$$3x + 2y - 4 = 0 \qquad \text{Sijoitetaan } y = -\frac{3}{2}x + 2.$$

$$3x + 2(-\frac{3}{2}x + 2) - 4 = 0$$

$$3x - 3x + 4 - 4 = 0$$

$$0 = 0$$

tosi

Saatiin yhden muuttujan $x$ yhtälö, jonka toteuttavat kaikki $x$:n arvot. Kaikki lukuparit $(x, y)$ eivät kuitenkaan toteuta alkuperäistä yhtälöparia. Esimerkiksi lukupari $(0, 0)$ ei toteuta kumpaakaan yhtälöparin yhtälöä.

Geometrinen tulkinta tilanteelle on, että yhtälöparin yhtälöt ovat saman suoran eri muodossa olevia yhtälöitä. Yhtälöparin toteuttavat suoran $y = -\frac{3}{2}x + 2$ (eli suoran $3x + 2y - 4 = 0$) pisteiden koordinaatit.*

**Vastaus**

a) Ei ratkaisuja.
b) Yhtälöparin toteuttavat suoran $y = -\frac{3}{2}x + 2$ pisteiden koordinaatit.

---

* Varmennetaan tämä saattamalla yhtälö $3x + 2y - 4 = 0$ ratkaistuun muotoon.

$$3x + 2y - 4 = 0$$
$$2y = -3x + 4 \qquad | : 2$$
$$y = -\frac{3}{2}x + 2$$

Yhtälöparin yhtälöt ovat siis saman suoran eri muodossa olevia yhtälöitä.

## ESIMERKKI 4

Kanalassa oli 450 valkoista ja 150 ruskeata kanaa. Kanalan kuukausituotannon suuruudeksi arvioitiin 13 000 munaa. Vertailukanalassa sekä valkoisia että ruskeita kanoja oli 300, ja niitä hoidettiin samanlaisissa oloissa. Tuotannon suuruudeksi arvioitiin 12 000 munaa kuukaudessa. Montako munaa yksi kummankin lajin kana keskimäärin munii kuukaudessa?

**Ratkaisu**

Valkoinen kana munii keskimäärin $x$ munaa ja ruskea kana keskimäärin $y$ munaa kuukaudessa. Kun molempien kanaloiden kuukausituotanto ilmaistaan $x$:n ja $y$:n avulla, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} 450x + 150y = 13\,000 & \mid \cdot (-2) \\ 300x + 300y = 12\,000 & \mid \cdot 1 \end{cases}$$

Eliminoidaan $y$ ja ratkaistaan $x$.

$$\begin{cases} -900x - 300y = -26\,000 \\ 300x + 300y = 12\,000 \end{cases}$$

$$-600x = -14\,000$$

$$x = \frac{-14\,000}{-600} \approx 23$$

$$\begin{cases} 450x + 150y = 13\,000 & \mid \cdot (-2) \\ 300x + 300y = 12\,000 & \mid \cdot 3 \end{cases}$$

Eliminoidaan $x$ ja ratkaistaan $y$.

$$\begin{cases} -900x - 300y = -26\,000 \\ 900x + 900y = 36\,000 \end{cases}$$

$$600y = 10\,000$$

$$y = \frac{10\,000}{600} \approx 17$$

**Vastaus**

Valkoinen kana munii noin 23 ja ruskea noin 17 munaa kuukaudessa.

## ESIMERKKI 5

Ratkaise yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 1 \\ x + 3y - z = 3 \\ 2x + 11y - 5z = 6 \end{cases}$$

**Ratkaisu**

Muodostetaan yhtälöryhmän yhtälöistä kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan niistä sama muuttuja.

Yhtälöryhmän ensimmäisestä ja toisesta yhtälöstä muodostetaan yhtälöpari, josta eliminoidaan $x$.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 1 & \mid \cdot 1 \\ x + 3y - z = 3 & \mid \cdot (-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 1 \\ -3x - 9y + 3z = -9 \end{cases}$$

$$-11y + 5z = -8$$

Toisesta ja kolmannesta yhtälöstä muodostetaan toinen yhtälöpari, josta myös eliminoidaan $x$.

$$\begin{cases} x + 3y - z = 3 & \mid \cdot (-2) \\ 2x + 11y - 5z = 6 & \mid \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 6y + 2z = -6 \\ 2x + 11y - 5z = 6 \end{cases}$$

$$5y - 3z = 0$$

Muodostetaan saaduista muuttujien $y$ ja $z$ yhtälöistä yhtälöpari.

$$\begin{cases} -11y + 5z = -8 & \mid \cdot 3 \\ 5y - 3z = 0 & \mid \cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -33y + 15z = -24 \\ 25y - 15z = 0 \end{cases}$$

$$-8y = -24 \quad \mid : (-8)$$

$$y = 3$$

Saatu $y$:n arvo sijoitetaan jompaankumpaan kahden tuntemattoman yhtälöön.

$5 \cdot 3 - 3z = 0$ Yhtälöön $5y - 3z = 0$ sijoitetaan $y = 3$.

$3z = 15$

$z = 5$

Saadut arvot $y = 3$ ja $z = 5$ sijoitetaan johonkin kolmen tuntemattoman yhtälöön.

$x + 3 \cdot 3 - 5 = 3$ Yhtälöön $x + 3y - z = 3$ sijoitetaan $y = 3$ ja $z = 5$.

$x + 4 = 3$

$x = -1$

Yhtälöparin ratkaisu on $x = -1$, $y = 3$ ja $z = 5$.*

**Vastaus** $x = -1,\ y = 3,\ z = 5$

---

* Tarkistus suoritetaan sijoittamalla $x = -1$, $y = 3$, $z = 5$ yhtälörymän jokaiseen kolmeen yhtälöön.

$$\begin{cases} 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 1 \\ -1 + 3 \cdot 3 - 5 = 3 \\ 2 \cdot (-1) + 11 \cdot 3 - 5 \cdot 5 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = 1 \\ 3 = 3 \\ 6 = 6 \end{cases}$$

tosi

## TEHTÄVIÄ

### SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**208.** Ratkaise yhtälöpari.

a) $\begin{cases} 2x - y = -7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3s + 2t = -9 \\ 4s + 3t = -5 \end{cases}$

**209.** Määritä suorien $x - 5y + 4 = 0$ ja $3x + 4y + 7 = 0$ leikkauspiste.

**210.** Missä pisteessä suorat leikkaavat toisensa?

a) $y = -2x + 3$ ja $x - 3y - 1 = 0$

b) $y = \frac{1}{3}x - 4$ ja $x - 3y - 12 = 0$

**211.** Ratkaise yhtälöpari.

a) $\begin{cases} 30x - 24y = 7 \\ -35x + 28y = 32 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 5x + 6y = 0 \end{cases}$

**212.** Ratkaise yhtälöpari.

$\begin{cases} 3(x - 2y - 1) = y - x \\ 9y = 4x + 3 \end{cases}$

**213.** Ratkaise yhtälöpari.

$\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1 \\ x + \frac{y}{4} = -1 \end{cases}$

(Ohje: Ennen muuttujan eliminoimista kannattaa poistaa nimittäjät kertomalla yhtälöt sopivilla luvuilla.)

**214.** Koulun musiikkikerho tuotti musikaalin, jota kävi katsomassa 421 maksanutta katsojaa. Lasten pääsyliput maksoivat 2 euroa ja aikuisten 5 euroa. Lipputulot olivat yhteensä 1 760 euroa. Kuinka monta lastenlippua ja kuinka monta aikuisten lippua myytiin?

**215.** Urheiluseuran myyjäisiin oli leivottu 400 pullaa, jotka pakattiin neljän ja kymmenen pullan pusseihin. Neljän pullan pakkauksen myyntihinta oli 2 euroa ja kymmenen pullan pakkauksen 4 euroa. Kaikki pullat myytiin ja myynnistä saatiin 174 euroa. Mikä oli neljän pullan ja kymmenen pullan pussien lukumäärä?

**216.** Ratkaise yhtälöryhmä.

$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$

**217.** Määritä pisteiden $(-5, 2)$, $(1, 4)$ ja $(-3, 0)$ kautta kulkevan ympyrän yhtälö. Mikä on ympyrän keskipiste ja mikä on sen säde?
(Ohje: Ympyrän yhtälö on muotoa $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Ympyrä kulkee pisteiden $(-5, 2)$, $(1, 4)$ ja $(-3, 0)$ kautta, jos pisteiden koordinaatit toteuttavat ympyrän yhtälön. Kun koordinaatit sijoitetaan yhtälöön $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, saadaan yhtälöryhmä, josta voidaan ratkaista kertoimet $A$, $B$ ja $C$.)

**218.** Annetaan muuttujalle $t$ arvoja ja lasketaan pisteen $x$- ja $y$-koordinaatit lausekkeilla $x = 2 - 3t$ ja $y = -1 + t$.

a) Laske $t$:n arvoilla 2 ja $-3$ saatavat pisteet $(x, y)$.

b) Osoita, että näin saadut pisteet $(x, y)$ muodostavat suoran. Minkä suoran?
(Ohje: Eliminoi muuttuja $t$ yhtälöparista $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + t. \end{cases}$)

**219.** Sisaruksilla Anni, Pekka ja Venla oli yhteensä 38 tarraa. Kun Anni antoi Pekalle kaksi tarraa ja isä Venlalle seitsemän tarraa, niin jokaisella oli yhtä monta. Kuinka monta tarraa kullakin oli alunperin?

**220.** Kolmesta eri juustolaadusta, joiden hinnat ovat 10 €/kg, 14 €/kg ja 16 €/kg ja rasvapitoisuudet vastaavasti 20 %, 30 % ja 60 %, halutaan tehdä kilogramman painoinen lajitelmapakkaus, jonka hinta on 13 € ja kokonaisrasvapitoisuus 35 %. Kuinka paljon kutakin juustoa lajitelmaan otetaan?

## SARJA II.
## PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**221.** Ratkaise yhtälöpari.

a) $\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a - 3b = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$

**222.** Osoita, että suorat $4x + y - 1 = 0$, $5x - 2y - 11 = 0$ ja $19x + 5y - 4 = 0$ leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

**223.** Ratkaise yhtälöpari.

$$\begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 4 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1 \end{cases}$$

**224.** Ratkaise yhtälöpari.

a) $\begin{cases} x = y + 1 \\ x = -4y + 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 2y - 6 \\ y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$

**225.** Ratkaise yhtälöpari.

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = 2 - \frac{y-3}{5} \\ x - \frac{4y+1}{3} = 18 \end{cases}$$

**226.** Charles Lutwige Dodgson (1832–98) oli matemaatikko, joka tuli maailmankuuluksi lastenkirjailijana salanimellä Lewis Carrol. Hänen kuuluisin kirjansa on Liisa Ihmemaassa. Seuraava lainaus on kirjasta *Through a Looking Glass*.
Said Tweedledum to Tweedledee:
”The sum of your weight and twice mine is 361 pounds.”
Said Tweedledee to Tweedledum:
”Contrariwise, the sum of your weight and twice mine is 362 pounds.”
Kuinka paljon Tweedledum ja Tweedledee painoivat?

**227.** Kun autoilija täytti auton polttoainesäiliön 40 litralla polttoainetta, hän arvioi ajaneensa edellisen tankkauksen jälkeen 150 km taajama-ajoa ja 300 km maantieajoa. Seuraavassa tankkauksessa säiliöön mahtui 38 litraa polttoainetta ja takana oli 200 km taajama-ajoa ja yhtä paljon maantieajoa. Mikä tämän perusteella on auton keskimääräinen polttoaineenkulutus taajama- ja maantieajossa? Polttoaineenkulutuksen yksikkö on l/100 km (litraa sadalla kilometrillä).

**228.** Ensimmäisen asteen polynomifunktiosta $f(x) = ax + b$ tiedetään, että $f(3) = 1$ ja $f(7) = 13$. Määritä funktion $f$ lauseke
a) ratkaisemalla kertoimet $a$ ja $b$ yhtälöparin avulla
b) muodostamalla funktion $f$ kuvaajasuoran yhtälö.

**229.** Yksi litra veden ja alkoholin seosta painaa 0,93 kg. Mikä seoksen alkoholipitoisuus on
a) tilavuusprosentteina
b) painoprosentteina?
Yksi litra vettä painaa 1,00 kg ja yksi litra alkoholia 0,79 kg.

**230.** Ratkaise yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} 4x + 2y + 5z = 0 \\ 6x - 3y - z = 23 \\ x - 2y + 3z = -1 \end{cases}$$

**231.** Määritä pisteiden $(-1, 1)$, $(3, 1)$ ja $(2, 2)$ kautta kulkevan ympyrän yhtälö. Mikä on ympyrän keskipiste ja mikä on sen säde? (Katso tehtävä 217.)

**232.** Annetaan muuttujalle $t$ arvoja ja lasketaan pisteen $x$- ja $y$-koordinaatit lausekkeilla $x = 4 + 2t$ ja $y = -4 - 3t$. Osoita, että näin saadut pisteet muodostavat suoran. Minkä suoran?

**233.** Kolmion sivujen keskipisteet ovat $(1, 3)$, $(3, -1)$ ja $(4, 0)$. Mitkä kolmion kärkipisteet ovat?

**234.** Päiväkodin pihassa oli vanhempainiltana yhteensä 28 polkupyörää. Osa oli tavallisia polkupyöriä, joissa joissakin oli lastenistuin, ja osa oli kolmipyöräisiä lastenpyöriä. Polkupyörissä oli yhteensä 60 pyörää ja 35 istumapaikkaa. Kuinka monessa polkupyörässä oli lastenistuin?

**235.** Metalliseokset $A$, $B$ ja $C$ sisältävät kultaa, lyijyä ja kuparia seuraavasti.

| | kultaa (%) | lyijyä (%) | kuparia (%) |
|---|---|---|---|
| $A$ | 10 | 20 | 70 |
| $B$ | 20 | 50 | 30 |
| $C$ | 60 | 30 | 10 |

Sulattamalla seoksia yhteen halutaan tehdä uusi seos, jossa on 20 % kultaa, 35 % lyijyä ja 45 % kuparia. Kuinka monta prosenttia tästä seoksesta on oltava kutakin seosta $A$, $B$ ja $C$?

# Ympyrän leikkauspisteitä

**Ongelma 1** Kuinka monta yhteistä pistettä suoralla ja ympyrällä voi olla?

## ESIMERKKI 1

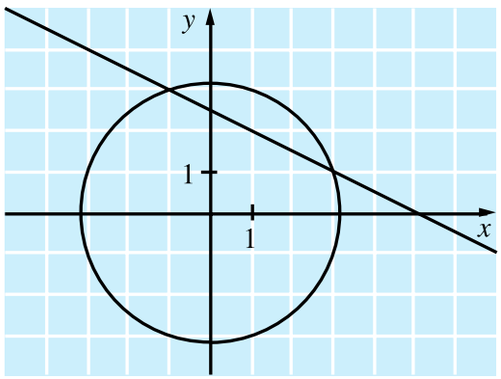
Missä pisteissä suora $x + 2y - 5 = 0$ leikkaa ympyrän $x^2 + y^2 = 10$?

**Ratkaisu**

Yhtälöparista

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

ei voida eliminoida kumpaakaan muuttujaa yhteenlaskumenetelmällä (kertomalla sopivilla luvuilla ja laskemalla yhteen). Yhtälöpari ratkaistaan sijoitusmenetelmällä.




Ratkaistaan suoran yhtälöstä jompikumpi muuttuja.

$x + 2y - 5 = 0$ Ratkaistaan $x$, jolle saadaan yksinkertaisempi lauseke.

$x = 5 - 2y$

Sijoitetaan muuttujalle saatu lauseke ympyrän yhtälöön.

$x^2 + y^2 = 10$ Sijoitetaan $x = 5 - 2y$.

$(5 - 2y)^2 + y^2 = 10$

$25 - 20y + 4y^2 + y^2 = 10$

$5y^2 - 20y + 15 = 0 \quad | : 5$

$y^2 - 4y + 3 = 0$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$y = 3$ tai $y = 1$

Leikkauspisteiden $x$-koordinaatit saadaan, kun $y$-koordinaatit sijoitetaan yhtälöön $x = 5 - 2y$.

$y = 3$: $\quad x = 5 - 2 \cdot 3 = -1$

$y = 1$: $\quad x = 5 - 2 \cdot 1 = 3$

Leikkauspisteet ovat $(-1, 3)$ ja $(3, 1)$.

**Vastaus** pisteissä $(-1, 3)$ ja $(3, 1)$

**Ongelma 2** Kuinka monta yhteistä pistettä kahdella ympyrällä voi olla?

## ESIMERKKI 2

Määritä ympyröiden $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$ ja $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 21 = 0$ leikkauspisteet.

**Ratkaisu** Muodostetaan ympyröiden yhtälöistä yhtälöpari ja kerrotaan toinen yhtälö $-1$:llä. Kun yhtälöt tämän jälkeen lasketaan yhteen, saadaan yhtälö, jossa ei ole toisen asteen termejä.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y - 21 = 0 \end{cases} \qquad \big| \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0 \\ -x^2 - y^2 - 4x - 2y + 21 = 0 \end{cases}$$

$$-6x - 6y + 18 = 0 \qquad \big| : (-6)$$

$$x + y - 3 = 0$$

Jatketaan kuten määritettäessä suoran ja ympyrän leikkauspistettä. Saadusta (suoran) yhtälöstä $x + y - 3 = 0$ ratkaistaan jompikumpi muuttuja.

$x + y - 3 = 0$ Ratkaistaan $y$.

$y = -x + 3$

Sijoitetaan muuttujalle saatu lauseke jompaankumpaan ympyrän yhtälöön.

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$ Ensimmäiseen ympyrän yhtälöön sijoitetaan $y = -x + 3$.

$x^2 + (-x + 3)^2 - 2x - 4(-x + 3) - 3 = 0$ $(-x + 3)^2 = (x - 3)^2$, sillä luvut $-x + 3$ ja $x - 3$ ovat toistensa vastalukuja.

$x^2 + x^2 - 6x + 9 - 2x + 4x - 12 - 3 = 0$

$2x^2 - 4x - 6 = 0 \quad | : 2$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$x = 3$ tai $x = -1$

Leikkauspisteiden $y$-koordinaatit saadaan, kun saadut $x$-koordinaatit sijoitetaan yhtälöön $y = -x + 3$.

$x = 3$: $y = -3 + 3 = 0$

$x = -1$: $y = -(-1) + 3 = 4$

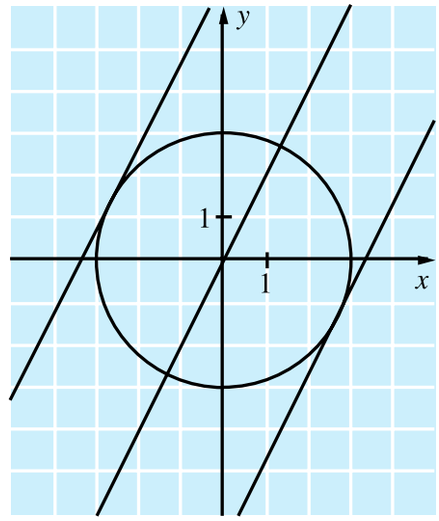
**Vastaus** $(3, 0)$ ja $(-1, 4)$

## ESIMERKKI 3

Mitkä ovat ympyrälle $x^2 + y^2 = 9$ piirrettyjen suoran $y = 2x$ suuntaisten tangenttien yhtälöt?

### Ratkaisu

Ympyrän $x^2 + y^2 = 9$ keskipiste on origo ja säde 3. Ympyrällä on kaksi suoran $y = 2x$ suuntaista tangenttia.




Suora on ympyrän tangentti, jos ja vain jos suoralla ja ympyrällä on yksi yhteinen piste. Jokaisen suoran $y = 2x$ suuntaisen suoran yhtälö on muotoa $y = 2x + b$. Suoran $y = 2x + b$ ja ympyrän $x^2 + y^2 = 9$ leikkauspisteet ovat yhtälöparin

$$\begin{cases} y = 2x + b \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

ratkaisut. Määritetään sellaiset vakion $b$ arvot, että yhtälöparilla on yksi ratkaisu.

Sijoitetaan suoran yhtälöstä saatu $y$:n lauseke ympyrän yhtälöön.

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad \text{Sijoitetaan } y = 2x + b.$$

$$x^2 + (2x + b)^2 = 9$$

$$x^2 + 4x^2 + 4bx + b^2 = 9$$

$$5x^2 + 4bx + b^2 - 9 = 0 \qquad \text{Toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat } 5,\ 4b \text{ ja } b^2 - 9.$$

Toisen asteen yhtälöllä on yksi juuri, kun yhtälön diskriminantti on 0. Yhtälön diskriminantti on

$$D = (4b)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (b^2 - 9)$$

Yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ diskriminantti on $D = b^2 - 4ac$.

$$= 16b^2 - 20b^2 + 180$$

$$= -4b^2 + 180.$$

Ratkaistaan, millä $b$:n arvoilla yhtälön diskriminantti on nolla.

$$-4b^2 + 180 = 0$$

$$4b^2 = 180$$

$$b^2 = 45$$

$$b = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \quad \text{tai} \quad b = -\sqrt{45} = -3\sqrt{5}$$

Tangenttien yhtälöt ovat $y = 2x + 3\sqrt{5}$ ja $y = 2x - 3\sqrt{5}$.

**Vastaus** $y = 2x + 3\sqrt{5}$ ja $y = 2x - 3\sqrt{5}$

## TEHTÄVIÄ

### SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**236.** Missä pisteissä suora $y = 2x$ leikkaa ympyrän $x^2 + y^2 = 80$?

**237.** Missä pisteissä suora $x + 3y - 2 = 0$ leikkaa ympyrän $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$?

**238.** Missä pisteissä ympyrä $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$ leikkaa
a) $x$-akselin b) $y$-akselin?

**239.** Missä pisteissä ympyrät $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ ja $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$ leikkaavat toisensa?

**240.** Koordinaatistoon on piirretty kaksi ympyrää, joista toisen keskipiste on origo ja säde 5 ja toisen keskipiste on $(6, -3)$ ja säde $\sqrt{10}$. Määritä ympyröiden leikkauspisteet.

**241.** Mitkä ovat ympyrälle $x^2 + y^2 = 10$ piirrettyjen suoran $y = 3x$ suuntaisten tangenttien yhtälöt?

**242.** Koordinaatistoon on piirretty ympyrä, jonka keskipiste on origo ja säde 5. Mikä ympyrän pisteistä on lähinnä pistettä $(2, 6)$?

**243.** Ympyrä kulkee pisteiden $(2, 5)$ ja $(4, 3)$ kautta ja ympyrän säde on 2. Määritä ympyrän yhtälö.

**244.** Seismologiset asemat määrittävät ns. seismografilla maanjäristyksen keskuksen etäisyyden asemasta. Keskus paikannetaan mittaamalla sen etäisyys kahdesta eri asemasta. Asemalla A mitattiin, että maanjäristyksen keskus on 300 kilometrin päässä. Asemalla B mitattiin, että keskus on 200 kilometrin päässä. Asema B sijaitsee paikassa, johon päästään ensimmäiseltä asemalta kulkemalla ensin 400 kilometriä itään ja sitten 100 kilometriä pohjoiseen. Mitkä ovat järistyksen keskuksen mahdolliset koordinaatit koordinaatistossa, jonka origossa on asema A, jonka $y$-akseli osoittaa pohjoiseen ja $x$-akseli itään ja jonka yksikkö vastaa 100 kilometriä?

### SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**245.** Määritä suoran $2x - y - 3 = 0$ ne pisteet, joiden etäisyys origosta on 3.

**246.** Missä pisteissä suora $x - y = 1$ leikkaa ympyrän $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$?

**247.** Tutka sijaitsee kartan koordinaatiston pisteessä (50, 70). Koordinaatiston yksikkö vastaa yhtä kilometriä luonnossa. Tutka pystyy tarkkailemaan ympyrän muotoista aluetta, jonka säde on 100 km. Kartalla rantaviiva kulkee pitkin $y$-akselia. Kuinka pitkä osa rantaviivaa näkyy tutkassa?

**248.** Kahden reaaliluvun summa on 1 ja neliöiden summa 13. Mitkä nämä kaksi lukua ovat?

**249.** Ratkaise yhtälöpari.

a) $\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases}$

**250.** Määritä ympyröiden
$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 3 = 0$ ja
$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ leikkauspisteet.

**251.** Toisen ympyrän keskipiste on $(3, 0)$ ja säde 2, ja toisen ympyrän keskipiste on $(2, 0)$ ja säde $\sqrt{5}$. Missä pisteissä ympyrät leikkaavat toisensa?

**252.** Mikä ympyrän $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$ pisteistä on lähinnä origoa?

**253.** Ympyrälle $x^2 + y^2 = 9$ piirretään tangentit, jotka kulkevat pisteen $(0, 5)$ kautta. Määritä tangenttien yhtälöt.

**254.** Ympyrälle $x^2 + y^2 = 5$ piirretään pisteen $(-1, 3)$ kautta kulkevat tangentit. Määritä tangenttien yhtälöt.

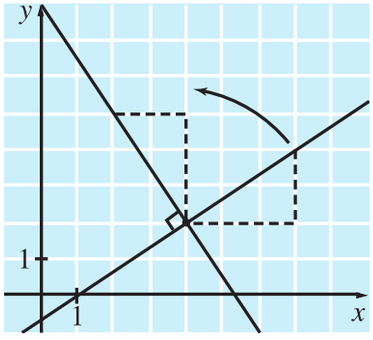
**255.** a) Millä $a$:n arvoilla yhtälö
$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay - 2 = 0$ esittää ympyrää?
Mikä on ympyrän $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay - 2 = 0$ keskipiste ja säde?
b) Osoita, että tasossa on kaksi pistettä, joiden kautta jokainen ympyräparven
$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay - 2 = 0$ ympyrä kulkee.
c) Piirrä kuva ympyräparvesta.

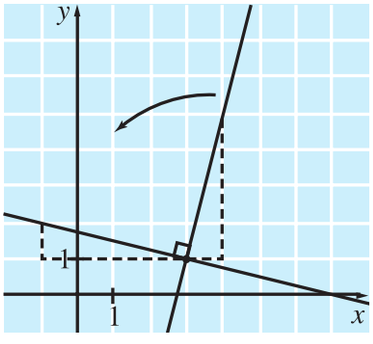
**256.** Ympyrät $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 12 = 0$ ja $x^2 + y^2 + x + y - 15 = 0$ leikkaavat kahdessa pisteessä. Määritä leikkauspisteitä ratkaisematta leikkauspisteiden kautta kulkevan suoran yhtälö. Perustele menetelmä.

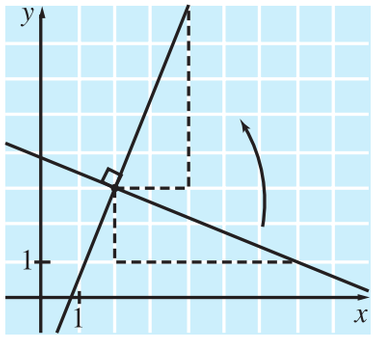
**257.** Kun kahden eri ympyrän muotoa $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ olevat yhtälöt vähennetään toisistaan, niin saadaan aina suoran yhtälö. Mikä geometrinen ominaisuus suoran pisteillä on silloin, kun ympyrät eivät leikkaa toisiaan? Piirrä ominaisuutta havainnollistava kuvio, kun ympyrät ovat $x^2 + y^2 - 8y + 15 = 0$ ja
$x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$.
(Ohje: Tulkitse lauseke $x^2 + y^2 + Ax + By + C$ janan pituuden neliöksi.)

# Suorien kohtisuoruus

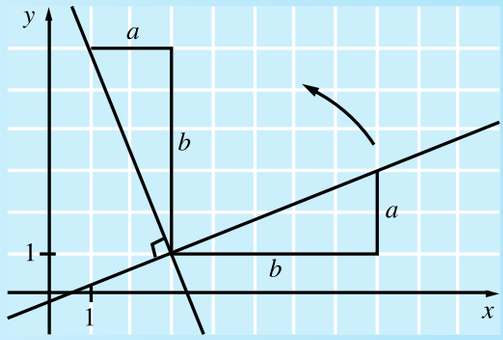
**Ongelma** Kuvioiden suoria on kierretty $90°$. Vertaa kierretyn suoran kulmakerrointa alkuperäisen suoran kulmakertoimeen.



Kun suoraa, joka ei ole $x$-akselin suuntainen ja jonka kulmakerroin on $\frac{a}{b}$, kierretään $90°$, saadaan suora, jonka kulmakerroin on $-\frac{b}{a}$.




Lasketaan kulmakertoimien tulo:

$$\frac{a}{b} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{ab}{ba} = -1$$

Siis toisiaan vastaan kohtisuorien suorien kulmakertoimien tulo on $-1$.

### Suorien kohtisuoruusehto

Kaksi suoraa, joiden kulmakertoimet ovat $k_1$ ja $k_2$, ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, jos ja vain jos suorien kulmakertoimien tulo on $-1$.

$$k_1 k_2 = -1$$

Lisäksi jokainen $x$-akselin suuntainen suora on kohtisuorassa jokaista $y$-akselin suuntaista vastaan.

### Suoran normaali

Jokainen suora, joka on kohtisuorassa suoraa $s$ vastaan, on suoran $s$ *normaali*.

Jos suoran $s$ kulmakerroin on $k_1$, missä $k_1 \neq 0$, niin normaalin kulmakerroin $k_2$ voidaan ratkaista yhtälön avulla:

$k_1 k_2 = -1$ Suoran ja sille piirretyn normaalin kulmakertoimien tulo on $-1$.

Yhtälön ratkaisu $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ voidaan tulkita myös sanallisesti:

Suoralle piirretyn normaalin kulmakerroin on suoran kulmakertoimen käänteisluvun vastaluku.

## ESIMERKKI 1

Ovatko suorat $20x + 15y - 4 = 0$ ja $6x - 8y + 15 = 0$ toisiaan vastaan kohtisuorassa?

**Ratkaisu**

Määritetään suorien kulmakertoimet.

$20x + 15y - 4 = 0$ Saatetaan yhtälö ratkaisuun muotoon.

$15y = -20x + 4 \quad | : 15$

$y = -\frac{20}{15}x + \frac{4}{15}$

$y = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{15}$

Suoran $20x + 15y - 4 = 0$ kulmakerroin on $-\frac{4}{3}$.

$6x - 8y + 15 = 0$ Saatetaan yhtälö ratkaisuun muotoon.

$-8y = -6x - 15 \quad | : (-8)$

$y = \frac{6}{8}x + \frac{15}{8}$

$y = \frac{3}{4}x + \frac{15}{8}$

Suoran $6x - 8y + 15 = 0$ kulmakerroin on $\frac{3}{4}$.

Lasketaan kulmakertoimien tulo.

$$-\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 4} = -1$$

Koska kulmakertoimien tulo on $-1$, suorat ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

**Vastaus** Ovat.

## ESIMERKKI 2

Suoralle a) $3x + 5y - 35 = 0$ b) $y - 7 = 0$ piirretään pisteen $(2, -4)$ kautta kulkeva normaali. Muodosta normaalin yhtälö.

**Ratkaisu**

a) Määritetään suoran $3x + 5y - 35 = 0$ kulmakerroin.

$$3x + 5y - 35 = 0$$

$$5y = -3x + 35 \qquad \big| : 5$$

$$y = -\frac{3}{5}x + 7$$

Suoran $3x + 5y - 35 = 0$ kulmakerroin on $-\frac{3}{5}$.

Normaalin kulmakerroin voidaan päätellä: Normaalin kulmakerroin on kulmakertoimen $-\frac{3}{5}$ käänteisluvun $-\frac{5}{3}$ vastaluku $\frac{5}{3}$.*

Muodostetaan normaalin yhtälö.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Sijoitetaan normaalin kulmakerroin $k = \frac{5}{3}$ ja pisteen $(2, -4)$ koordinaatit $x_0 = 2$ ja $y_0 = -4$.

$$y - (-4) = \frac{5}{3}(x - 2)$$

$$y + 4 = \frac{5}{3}(x - 2) \qquad \big| \cdot 3$$

$$3y + 12 = 5(x - 2)$$

$$3y + 12 = 5x - 10$$

$$5x - 3y - 22 = 0$$

b) Suora $y - 7 = 0$ eli suora $y = 7$ on $x$-akselin suuntainen, joten suoran normaalit ovat $y$-akselin suuntaisia. Pisteen $(2, -4)$ kautta kulkevan $y$-akselin suuntaisen suoran yhtälö on $x = 2$.

**Vastaus**

a) $5x - 3y - 22 = 0$ b) $x = 2$

---

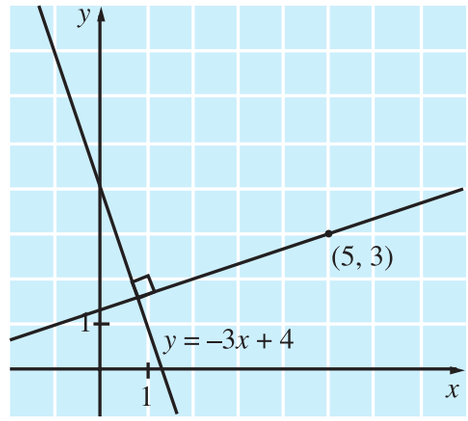
* Normaalin kulmakerroin $k$ voidaan myös ratkaista yhtälöllä käyttämällä kohtisuoruusehtoa $-\frac{3}{5}k = -1$.

## ESIMERKKI 3

Mikä suoran $y = -3x + 4$ piste on lähinnä pistettä $(5, 3)$?

### Ratkaisu

Suoran $y = -3x + 4$ piste, joka on lähinnä pistettä $(5, 3)$, on suoran $y = -3x + 4$ ja sille pisteen $(5, 3)$ kautta piirretyn normaalin leikkauspiste.




Määritetään normaalin yhtälö.
Normaalin kulmakerroin on kulmakertoimen $-3$ käänteisluvun vastaluku $\frac{1}{3}$.

$y - y_0 = k(x - x_0)$

Sijoitetaan normaalin kulmakerroin $k = \frac{1}{3}$ ja pisteen $(5, 3)$ koordinaatit $x_0 = 5$ ja $y_0 = 3$.

$$y - 3 = \frac{1}{3}(x - 5)$$

$$y - 3 = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

Ratkaistaan suoran $y = -3x + 4$ ja normaalin $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ leikkauspiste.

$-3x + 4 = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \quad | \cdot 3$ Ratkaistaan leikkauspisteen $x$-koordinaatti.

$-9x + 12 = x + 4$

$-10x = -8 \quad | : (-10)$

$x = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ Leikkauspisteen $x$-koordinaatti.

Leikkauspisteen $y$-koordinaatti on

$$y = -3 \cdot \frac{4}{5} + 4 \qquad \text{Yhtälöön } y = -3x + 4 \text{ sijoitetaan } x = \frac{4}{5}.$$

$$= -\frac{12}{5} + 4 = \frac{8}{5}.$$

Lähin piste on $(\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$.

**Vastaus** $(\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$

### Janan keskinormaali

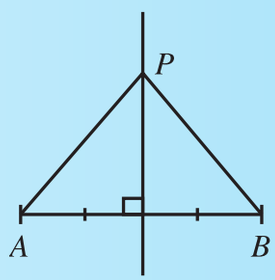
Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja joka on kohtisuorassa janaa vastaan.

Janan keskinormaalilla on tärkeä geometrinen ominaisuus, jota käytetään seuraavassa esimerkissä.

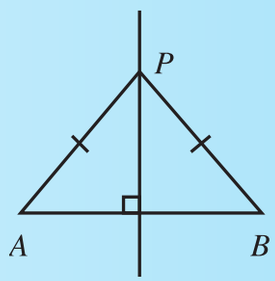
> Piste on yhtä kaukana janan päätepisteistä, jos ja vain jos se on janan keskinormaalilla.

Ominaisuus voidaan perustella symmetrian ja tasakylkisen kolmion ominaisuuksien avulla.

Oletetaan, että piste $P$ on janan $AB$ keskinormaalilla. Tällöin viereinen kuvio on symmetrinen keskinormaalin suhteen, joten $PA = PB$.




Oletetaan kääntäen, että $PA = PB$. Tällöin kolmio $ABP$ on tasakylkinen, joten pisteestä $P$ piirretty kolmion korkeusjana kulkee janan $AB$ keskipisteen kautta. Siis pisteen $P$ kautta piirretty janan $AB$ normaali on janan $AB$ keskinormaali, eli piste $P$ on keskinormaalilla.



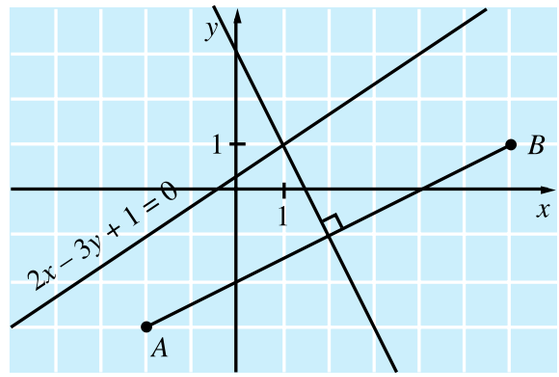
## ESIMERKKI 4

Kesämökit sijaitsevat kartan koordinaatiston pisteissä $A(-2, -3)$ ja $B(6, 1)$. Mökkien sivuitse kulkee suora tie, jonka yhtälö on $2x - 3y + 1 = 0$. Mikä tien piste on yhtä etäällä kummastakin mökistä?

### Ratkaisu

*Tapa 1.* Piste on yhtä kaukana janan pisteistä $A$ ja $B$, jos ja vain jos se on janan $AB$ keskinormaalilla.

Määritetään janan $AB$ keskinormaalin yhtälö ja ratkaistaan keskinormaalin ja suoran $2x - 3y + 1 = 0$ leikkauspiste.




Janan $AB$ keskipisteen $x$-koordinaatti on

$$\frac{-2+6}{2} = 2.$$

Päätepisteiden $A(-2, -3)$ ja $B(6, 1)$ $x$-koordinaattien keskiarvo.

Keskipisteen $y$-koordinaatti on

$$\frac{-3+1}{2} = -1.$$

Päätepisteiden $A(-2, -3)$ ja $B(6, 1)$ $y$-koordinaattien keskiarvo.

Janan $AB$ keskipiste on $(2, -1)$.

Janan $AB$ kulmakerroin on

$$k = \frac{1-(-3)}{6-(-2)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Päätepisteiden $A(-2, -3)$ ja $B(6, 1)$ $y$-koordinaattien erotus jaettuna $x$-koordinaattien erotuksella.

Keskinormaalin kulmakerroin on kulmakertoimen $\frac{1}{2}$ käänteisluvun vastaluku $-2$.

Muodostetaan keskinormaalin yhtälö.

$$y - (-1) = -2(x - 2)$$
$$y + 1 = -2(x - 2)$$
$$y = -2x + 3$$

Kysytty piste on keskinormaalin ja suoran $2x - 3y + 1 = 0$ leikkauspiste. Ratkaistaan leikkauspiste.

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

Sijoitetaan alempaan yhtälöön $y = -2x + 3$.

$$2x - 3(-2x + 3) + 1 = 0$$
$$2x + 6x - 9 + 1 = 0$$
$$8x = 8$$
$$x = 1$$

Sijoitetaan $x = 1$ ensimmäiseen yhtälöön: $y = -2 \cdot 1 + 3 = 1$.

Kysytty piste on $(1, 1)$.

*Tapa 2.* Haetun pisteen $(x, y)$ tulee toteuttaa kaksi ehtoa:

Piste $(x, y)$ on suoralla $2x - 3y + 1 = 0$, ja

piste $(x, y)$ on yhtä etäällä pisteistä $(-2, -3)$ ja $(6, 1)$ eli

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-1)^2}\,.$$

Korotetaan etäisyysyhtälö toiseen potenssiin ja sievennetään.

$$(x+2)^2 + (y+3)^2 = (x-6)^2 + (y-1)^2$$
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 2y + 1$$
$$16x + 8y - 24 = 0 \qquad \big| : 8$$
$$2x + y - 3 = 0^*$$

Haetun pisteen tulee siis toteuttaa yhtälöpari.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \qquad \big| \cdot 3$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 6x + 3y - 9 = 0 \end{cases}$$
$$8x - 8 = 0$$
$$8x = 8 \qquad \big| : 8$$
$$x = 1$$

Sijoitetaan $x = 1$ yhtälöparin jälkimmäiseen yhtälöön.

$$2 \cdot 1 + y - 3 = 0$$
$$y - 1 = 0$$
$$y = 1$$

Kysytty piste on $(1, 1)$.

**Vastaus** $(1, 1)$

* Sievennöksen tuloksena saatiin keskinormaalin yhtälö.

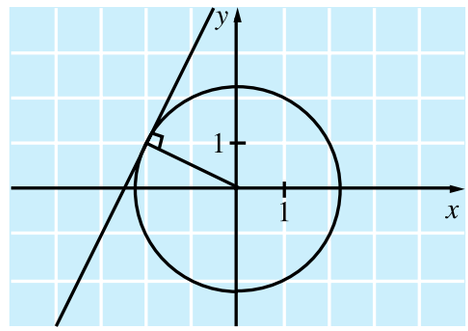
## ESIMERKKI 5

Ympyrälle $x^2 + y^2 = 5$ piirretään tangentti, joka kulkee ympyrän pisteen $(-2, 1)$ kautta. Mikä tangentin yhtälö on?

### Ratkaisu

Koska piste $(-2, 1)$ on ympyrällä, tangentti voidaan ratkaista käyttämällä hyväksi tietoa:

Ympyrän tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan.




Pisteeseen $(-2, 1)$ piirretyn ympyrän säteen kulmakerroin on

$$k = \frac{1 - 0}{-2 - 0} = -\frac{1}{2}.$$

Tangentin kulmakerroin on säteen kulmakertoimen käänteisluvun $-2$ vastaluku $2$.

Pisteen $(-2, 1)$ kautta kulkevan tangentin yhtälö on:

$$y - 1 = 2(x - (-2))$$

$$y - 1 = 2x + 4$$

$$y = 2x + 5$$

### Vastaus

$y = 2x + 5$

## TEHTÄVIÄ

### SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**258.** Ovatko suorat, joiden kulmakertoimet ovat

a) $\frac{1}{3}$ ja $3$ b) $\frac{3}{4}$ ja $-\frac{4}{3}$

kohtisuorassa toisiaan vastaan?

**259.** Mikä suoran normaalin kulmakerroin on, jos suoran kulmakerroin on a) $4$ b) $-\frac{5}{6}$?

**260.** Osoita, että suorat $8x + 12y + 17 = 0$ ja $30x - 20y - 1 = 0$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

**261.** Suora kulkee pisteen $(-1, 2)$ kautta ja on kohtisuorassa suoraa

a) $2x - 6y + 7 = 0$

b) $2x - 5 = 0$

vastaan. Määritä suoran yhtälö.

**262.** Tie kulkee kartan koordinaatistossa pitkin suoraa $y = \frac{1}{3}x$. Pisteessä $(5, 2)$ sijaitsevalle talolle rakennetaan liittymä tien kohtaan, joka on lähinnä taloa. Mihin pisteeseen liittymä rakennetaan?

**263.** Janan päätepisteet ovat $A(2, -3)$ ja $B(-4, 5)$.

a) Määritä janan keskinormaalin yhtälö.

b) Mikä $y$-akselin piste on yhtä etäällä pisteistä $A$ ja $B$?

**264.** Mikä on ympyrälle $x^2 + y^2 - 13 = 0$ pisteeseen $(2, -3)$ piirretyn tangentin yhtälö?

**265.** Ympyrän keskipiste on $(2, -1)$ ja ympyrä sivuaa suoraa $x - 2y + 6 = 0$. Mikä on

a) sivuamispiste

b) ympyrän säde

c) ympyrän yhtälö?

**266.** Kartan koordinaatistossa tie kulkee pitkin suoraa $2x - 3y + 3 = 0$. Mikä on pisteessä $(5, 0)$ olevan matkapuhelinantennin lyhin etäisyys tiestä? Koordinaatiston yksikkö vastaa $500$ metriä luonnossa.

**267.** Kolmen pisteen kautta kulkevan ympyrän yhtälö voidaan määrittää yhtälöryhmän avulla (tehtävä 217 sivulla 100). Ympyrän keskipiste on yhtä etäällä jokaisesta kolmesta pisteestä, joten keskipiste voidaan määrittää myös keskinormaalien leikkauspisteenä. Määritä tällä tavoin pisteiden $A(-1, 3)$, $B(3, 1)$ ja $C(7, 5)$ kautta kulkevan ympyrän

a) keskipiste

b) säde

c) yhtälö.

**268.** Millä $k$:n arvoilla suorat $2x + ky - 11 = 0$ ja $(3 - k)x + y + 2 = 0$ ovat

a) yhdensuuntaiset

b) kohtisuorassa toisiaan vastaan?

## SARJA II.
## PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**269.** Onko suora kohtisuorassa suoraa $12x - 18y + 3 = 0$ vastaan?
a) $6x + 4y + 1 = 0$
b) $3x - 2y - 4 = 0$
c) $15x + 10y = 0$

**270.** Kolmion $ABC$ kärkipisteet ovat $A(-43, 14)$, $B(17, -16)$ ja $C(38, 26)$. Osoita, että kolmio $ABC$ on suorakulmainen.

**271.** Suora $s_1$ on suoran $3x + 5y - 11 = 0$ suuntainen, ja suora $s_2$ on kohtisuorassa suoraa $3x + 5y - 11 = 0$ vastaan. Molemmat suorat $s_1$ ja $s_2$ kulkevat pisteen $(-5, 2)$ kautta. Muodosta suorien $s_1$ ja $s_2$ yhtälöt.

**272.** Pääviemäri kulkee kartan koordinaatistossa pitkin suoraa $y = 3x - 2$. Pisteessä $(0, 5)$ sijaitsevasta talosta halutaan rakentaa pääviemäriin liittyvä mahdollisimman lyhyt yhdysviemäri. Missä pisteessä talon viemärin tulee yhtyä pääviemäriin?

**273.** Kartan koordinaatistossa järvi on ympyrä, jonka keskipiste on origossa ja säde 5. Kahden kylän yhteinen uimaranta halutaan rakentaa järven rantaan paikkaan, joka on yhtä etäällä molemmista kylistä. Toinen kylä sijaitsee pisteessä $(2, 9)$ ja toinen pisteessä $(8, 3)$. Mihin uimaranta rakennetaan?

**274.** Mikä on ympyrälle $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ pisteeseen $(2, 0)$ piirretyn tangentin yhtälö?

**275.** Osoita, että ympyrälle $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$ pisteisiin $(-4, 1)$ ja $(-2, 5)$ piirretyt tangentit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

**276.** Talot sijaitsevat kartan koordinaatiston pisteissä $(2, 0)$, $(10, 8)$ ja $(2, 12)$. Talojen yhteinen muuntaja rakennetaan paikkaan, joka on yhtä etäällä kaikista taloista. Mihin muuntaja rakennetaan?

**277.** Mikä ympyrän $x^2 + y^2 = 34$ piste on lähinnä suoraa $5x - 3y + 60 = 0$?

**278.** Määritä suoran $y = x + 3$ pisteet, joista origoa ja pistettä $(0, 5)$ yhdistävä jana näkyy suorassa kulmassa.

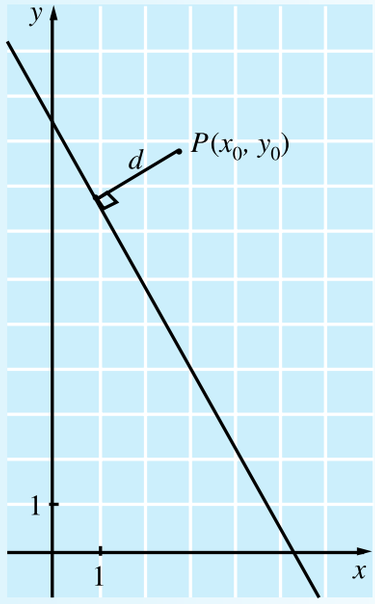
**279.** Minkä käyrän muodostavat tason pisteet $P(x, y)$, joilla on seuraava ominaisuus: Pisteen $P(x, y)$ ja pisteen $A(-2, 0)$ kautta kulkeva suora on kohtisuorassa pisteen $P(x, y)$ ja pisteen $B(4, 0)$ kautta kulkevaa suoraa vastaan?

**280.** Osoita analyyttisen geometrian menetelmillä, että puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suorakulma.

**281.** a) Osoita, että kolmion korkeusjanat (tai niiden jatkeet) leikkaavat toisensa samassa pisteessä. (Piste on yksi kolmion ns. merkillisistä pisteistä, katso tehtävä 163 sivulla 72.)
b) Kolmion kärjet ovat pisteissä $(0, 0)$, $(0, 7)$ ja $(-3, 1)$. Määritä kolmion korkeusjanojen (tai niiden jatkeiden) leikkauspiste.

# Pisteen etäisyys suorasta

Pisteen etäisyys suorasta voidaan laskea niin, että määritetään lähin suoralla oleva piste kuten edellisen luvun esimerkissä 3, ja lasketaan etäisyys lähimmästä pisteestä. Etäisyys voidaan laskea myös seuraavalla kaavalla.




### Pisteen etäisyys suorasta

Pisteen $(x_0, y_0)$ etäisyys suorasta $Ax + By + C = 0$ on

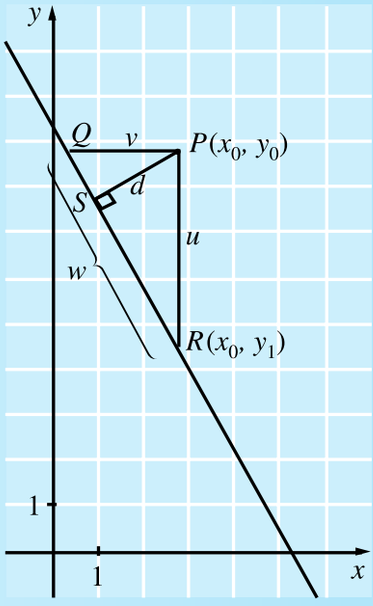
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Suoran yhtälö on yleisessä muodossa. Osoittaja on lausekkeen $Ax + By + C$ pisteessä $(x_0, y_0)$ saaman arvon itseisarvo. Nimittäjä on suoran yhtälön kertoimien $A$ ja $B$ neliöiden summan neliöjuuri.

### Kaavan johto

Seuraavassa oletetaan, että suora $Ax + By + C = 0$ ei ole koordinaatti-akselin suuntainen, jolloin molemmat kertoimet $A$ ja $B$ ovat eri suuria kuin nolla. Kaavan osoittaminen oikeaksi silloin, kun suora on jomman-kumman koordinaattiakselin suuntainen, on tehtävänä 304.

Piirretään pisteen $P(x_0, y_0)$ kautta koordinaattiakselien suuntaiset suorat. Suorat rajaavat yhdessä suoran $Ax + By + C = 0$ kanssa suorakulmaisen kolmion $PQR$. Pisteen $P$ etäisyys suorasta on kolmion korkeusjanan $PS$ pituus $d$.




Suorakulmaiset kolmiot $SPR$ ja $PQR$ ovat yhdenmuotoiset (yhdenmuotoisuuslause kk). Vastinsivujen pituuksien suhteista saadaan verranto $\frac{d}{u} = \frac{v}{w}$, joten

$d = u \cdot \frac{v}{w}$.

Määritetään sivun $PR$ pituus $u$ ja suhteen $\frac{v}{w}$ arvo.

Sivun $PR$ pituus $u$:

Piste $R$ on suoralla $Ax + By + C = 0$, ja pisteen $R$ $x$-koordinaatti on $x_0$. Pisteen $R$ $y$-koordinaatti $y_1$ saadaan, kun $x$-koordinaatti $x_0$ sijoitetaan suoran yhtälön ratkaistuun muotoon $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$.

Siis $y_1 = -\frac{A}{B}x_0 - \frac{C}{B}$.

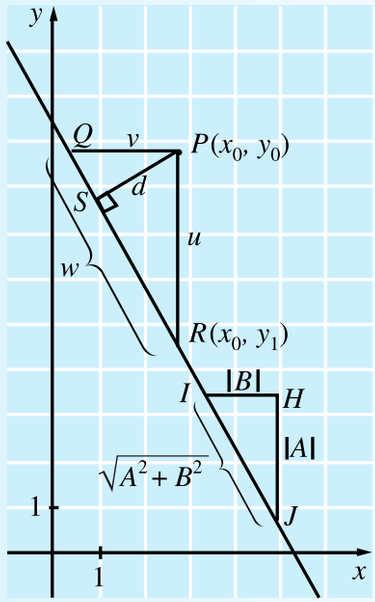
Janan $PR$ pituus on pisteiden $P$ ja $R$ $y$-koordinaattien erotuksen itseisarvo:

$$u = |y_0 - y_1| = |y_0 - (-\frac{A}{B}x_0 - \frac{C}{B})| = |y_0 + \frac{A}{B}x_0 + \frac{C}{B}|$$

$$= \left|\frac{By_0}{B} + \frac{Ax_0}{B} + \frac{C}{B}\right| = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{B}\right| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{|B|}.$$

Suhteen $\frac{v}{w}$ arvo:

Suoran yhtälön $Ax + By + C = 0$ ratkaistusta muodosta $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ nähdään, että suoran kulmakerroin on $-\frac{A}{B}$.




Kulmakertoimen itseisarvo on $\frac{|A|}{|B|}$.

Suoralle voidaan siis piirtää apukolmio $HIJ$, jonka kateettien pituudet ovat $|A|$ ja $|B|$. Pythagoraan lauseen nojalla kolmion $HIJ$ hypotenuusan pituus on $\sqrt{A^2 + B^2}$. Kolmiot $PQR$ ja $HIJ$ ovat yhdenmuotoiset, joten

$$\frac{v}{w} = \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Saadut arvot sijoitetaan lausekkeeseen $d = u \cdot \frac{v}{w}$.

$$d = u \cdot \frac{v}{w} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{|B|} \cdot \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \square$$

## ESIMERKKI 1

Määritä pisteen $(2, 1)$ etäisyys suorasta $y = \frac{1}{3}x - 4$.

**Ratkaisu**

Suoran yhtälö saatetaan yleiseen muotoon $Ax + By + C = 0$. Jotta kaavaan sijoittamisen olisi yksinkertaisempaa, yhtälöstä poistetaan samalla nimittäjät.

$$y = \frac{1}{3}x - 4 \qquad \big| \cdot 3$$

$$3y = x - 12$$

$$x - 3y - 12 = 0$$

Pisteen $(2, 1)$ etäisyys suorasta $x - 3y - 12 = 0$ on

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Lausekkeeseen $x - 3y - 12$ sijoitetaan pisteen $(2, 1)$ koordinaatit $x_0 = 2$ ja $y_0 = 1$. Nimittäjään sijoitetaan suoran yhtälön kertoimet $A = 1$ ja $B = -3$.

$$= \frac{|2 - 3 \cdot 1 - 12|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|-13|}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{13}{\sqrt{10}} \approx 4{,}1.$$

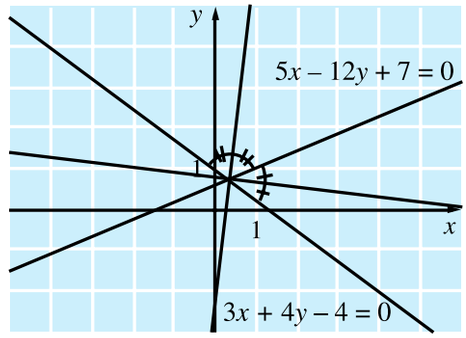
Etäisyys suorasta on $\frac{13}{\sqrt{10}}$. Likiarvo lasketaan tarkistukseksi ja havainnollistukseksi.

**Vastaus**

$\frac{13}{\sqrt{10}} \approx 4{,}1$

## ESIMERKKI 2

Määritä suorien $3x + 4y - 4 = 0$ ja $5x - 12y + 7 = 0$ muodostamien kulmien puolittajien yhtälöt.




### Ratkaisu

Suorien yhtälöiden muodostaminen perustuu kulman puolittajan geometriseen ominaisuuteen: Piste on kulman puolittajalla, jos ja vain jos se on yhtä etäällä kulman kyljistä.*

Siis piste $(x, y)$ on suorien $3x + 4y - 4 = 0$ ja $5x - 12y + 7 = 0$ muodostaman kulman puolittajalla, jos ja vain jos se on yhtä etäällä molemmista suorista. Muodostetaan etäisyyksien lausekkeet, merkitään ne yhtä suuriksi ja sievennetään yhtälö.

$$\frac{|3x + 4y - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|5x - 12y + 7|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}}$$

$$\frac{|3x + 4y - 4|}{5} = \frac{|5x - 12y + 7|}{13} \qquad | \cdot 5 \cdot 13$$

$$13|3x + 4y - 4| = 5|5x - 12y + 7| \qquad |a||b| = |ab|$$

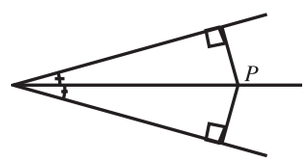
$$|39x + 52y - 52| = |25x - 60y + 35| \qquad |a| = |b|, \text{ jos ja vain jos } a = b \text{ tai } a = -b.$$

$$39x + 52y - 52 = 25x - 60y + 35 \quad \text{tai} \quad 39x + 52y - 52 = -(25x - 60y + 35)$$

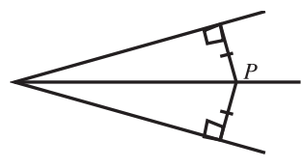
$$14x + 112y - 87 = 0 \quad \text{tai} \quad 64x - 8y - 17 = 0$$

---

* Ominaisuus voidaan perustella käyttämällä hyväksi symmetriaa. Oletetaan, että piste $P$ on kulman puolittajalla. Kuvio on symmetrinen kulman puolittajan suhteen, joten piste $P$ on yhtä etäällä kulman kyljistä.




Oletetaan kääntäen, että piste $P$ on yhtä etäällä kulman kyljistä. Kuvio on symmetrinen pisteen $P$ ja kulman kärjen kautta kulkevan suoran suhteen, joten suora puolittaa kulman. Siis piste $P$ on kulman puolittajalla.



Ratkaisuna saatiin kaksi suoraa.

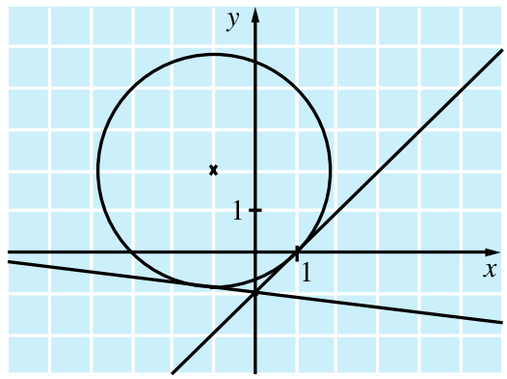
**Vastaus** $14x + 112y - 87 = 0$ ja $64x - 8y - 17 = 0$

## ESIMERKKI 3

Pisteestä $(0, -1)$ piirretään tangentti ympyrälle $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$. Määritä tangentin yhtälö.

**Ratkaisu**

Ympyrän $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$ keskipiste on $(-1, 2)$ ja säde $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Piste $(0, -1)$ on ympyrän ulkopuolella.*
Ympyrällä on kaksi pisteen $(0, -1)$ kautta kulkevaa tangenttia.

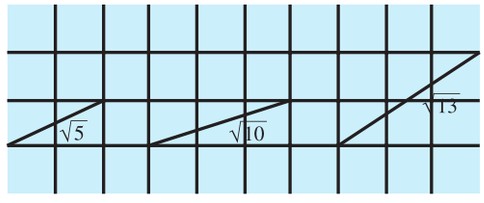



Pisteen $(0, -1)$ kautta kulkevan suoran (lukuun ottamatta $y$-akselin suuntaista suoraa) yhtälö on muotoa:

$$y - (-1) = k(x - 0)$$
$$y + 1 = kx$$
$$y = kx - 1$$

---

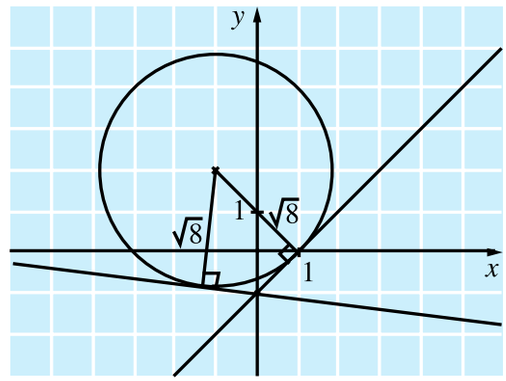
* Ympyrän voi piirtää laskematta säteen likiarvoa, sillä $\sqrt{2}$ on yhden ruudun lävistäjän pituus ja $2\sqrt{2}$ siis kaksi ruudun lävistäjää. Monet muutkin säteet voi piirtää ilman likiarvoja, esimerkiksi säteet $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ ja $\sqrt{13}$:



Kulmakerroin $k$ voidaan määrittää käyttämällä hyväksi tietoa:*

Suora sivuaa ympyrää, jos ja vain jos suoran etäisyys ympyrän keskipisteestä on yhtä suuri kuin ympyrän säde.

Ratkaistaan, millä $k$:n arvoilla ympyrän keskipisteen $(-1, 2)$ etäisyys suorasta $y = kx - 1$ on $\sqrt{8}$.




Suoran yhtälö saatetaan etäisyyskaavan edellyttämään yleiseen muotoon $Ax + By + C = 0$.

$$y = kx - 1$$

$$kx - y - 1 = 0 \qquad A = k,\ B = -1,\ C = -1$$

Muodostetaan ja sievennetään pisteen $(-1, 2)$ etäisyys suorasta $kx - y - 1 = 0$.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Lausekkeeseen $kx - y - 1$ sijoitetaan pisteen $(-1, 2)$ koordinaatit $x_0 = -1$ ja $y_0 = 2$. Nimittäjään sijoitetaan kertoimet $A = k$ ja $B = -1$.

$$= \frac{|k \cdot (-1) - 2 - 1|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{|-k - 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} \qquad |-a| = |a|$$

---

* Kulmakerroin $k$ voidaan määrittää myös vaatimalla, että yhtälöparilla

$$\begin{cases} y = kx - 1 \\ (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 8 \end{cases}$$

on vain yksi juuri. Tämä menetelmä johtaa toisen asteen yhtälön diskriminantin tutkimiseen.

Tulee olla:

$$\frac{|k+3|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{8} \qquad | \cdot \sqrt{k^2+1}$$

$$|k+3| = \sqrt{8} \cdot \sqrt{k^2+1}$$

Yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiiviset, joten yhtälö säilyy yhtäpitävänä, kun sen molemmat puolet korotetaan toiseen potenssiin.

$$(k+3)^2 = 8(k^2+1)$$

$$k^2 + 6k + 9 = 8k^2 + 8$$

$$7k^2 - 6k - 1 = 0$$

Yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavalla.

$$k = 1 \text{ tai } k = -\frac{1}{7}$$

Tangenttien yhtälöt ovat

$$y = x - 1 \text{ ja } y = -\frac{1}{7}x - 1.$$

Yhtälöön $y = kx - 1$ sijoitetaan $k = 1$ ja $k = -\frac{1}{7}$.

**Vastaus** $y = x - 1$ tai $y = -\frac{1}{7}x - 1$

## TEHTÄVIÄ

### SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**282.** Laske pisteen etäisyys suorasta $4x - 5y - 2 = 0$.
a) $(0, 0)$ b) $(-1, 3)$

**283.** Laske pisteen $(-4, -1)$ etäisyys
a) suorasta $y = \frac{1}{6}x - \frac{2}{3}$
b) suorasta $y = 5$
c) $y$-akselista.

**284.** Kuinka suuri on suoran $y = -3x + 11$ etäisyys ympyrästä $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$?

**285.** Määritä suorien $3x + 4y - 8 = 0$ ja $y - 2 = 0$ muodostamien kulmien puolittajien yhtälöt.

**286.** Osoita, että suora $y = \frac{2}{3}x - 1$ on ympyrän $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 13$ tangentti.

**287.** Mikä origokeskinen ympyrä sivuaa suoraa $4x - 2y - 5 = 0$?

**288.** Mitkä ovat pisteestä $(5, -3)$ ympyrälle $x^2 + y^2 = 25$ piirrettyjen tangenttien yhtälöt?

**289.** Ympyrän keskipiste on $(1, -2)$ ja säde 1. Mitkä ovat ympyrän origon kautta kulkevien tangenttien yhtälöt?

**290.** Määritä suoran $y = -\frac{3}{4}x$ suuntaiset tangentit ympyrälle $(x + 3)^2 + y^2 = 16$.

**291.** Kuinka suuri on yhdensuuntaisten suorien $2x + 3y - 5 = 0$ ja $2x + 3y + 8 = 0$ etäisyys toisistaan?

**292.** Mitkä ovat ne suorat, joiden etäisyys suorasta $7x - 24y + 16 = 0$ on 2?

### SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**293.** Kartan koordinaatiston pisteessä $(-3, 6)$ on autiotupa. Kuinka etäällä autiotupa on
a) pitkin suoraa $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}$ kulkevasta tiestä
b) pitkin suoraa $2x - 7 = 0$ kulkevasta rajalinjasta?
Koordinaatiston yksikkö vastaa yhtä kilometriä luonnossa.

**294.** Kolmion yksi kärki on pisteessä $(-2, 3)$, ja kolmion yksi sivu, jonka pituus on 21, on suoralla $8x - 15y - 7 = 0$. Kuinka suuri kolmion pinta-ala on?

**295.** Ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 4 = 0$. Osoita, että
a) suoralla $y = x + 11$ ja ympyrällä ei ole yhteisiä pisteitä
b) suora $13x - 16y - 11 = 0$ sivuaa ympyrää.

**296.** Mitkä ovat suorien $x + 7y = 0$ ja $x - y = 0$ muodostamien kulmien puolittajien yhtälöt?

**297.** Määritä yhtälöt ympyrän $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ niille tangenteille, jotka kulkevat pisteen $(1, 3)$ kautta.

**298.** Kun kuljettiin pitkin erästä suoran $y = 3x$ suuntaista suoraa, niin origo ohitettiin kahden yksikön etäisyydeltä. Mitä suoraa pitkin kuljettiin?

**299.** Suorat $3x - 4y = 0$ ja $x = 8$ ja $x$-akseli rajaavat kolmion. Määritä kolmion sisään piirretyn ympyrän a) keskipiste b) yhtälö. Piirrä kuvio.
(Ohje: Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion kulmien puolittajien leikkauspiste, sillä kolmion kulmien puolittajien leikkauspiste on yhtä etäällä kolmion kaikista kyljistä.)

**300.** Kolmion kaksi kärkeä on pisteissä $(1, 2)$ ja $(4, -4)$, ja kolmas kärki on $x$-akselilla. Kolmion pinta-ala on $6$. Missä $x$-akselin pisteessä kolmas kärki on?

**301.** Määritä pisteen $(2, 3)$ kautta kulkevat suorat, joiden etäisyys pisteestä $(-3, -2)$ on kaksi kertaa niin suuri kuin etäisyys pisteestä $(5, -1)$.

**302.** Millä käyrällä ovat pisteet, joiden etäisyys suorasta $3x + 4y - 12 = 0$ on kaksi kertaa niin suuri kuin etäisyys suorasta $y - 3 = 0$?

**303.** Määritä yhtälö jokaiselle neljälle ympyrälle, jotka sivuavat $x$-akselia, $y$-akselia ja suoraa $3x + 4y - 12 = 0$.

**304.** Osoita, että pisteen $(x_0, y_0)$ etäisyys suorasta $Ax + By + C = 0$ voidaan laskea kaavalla

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

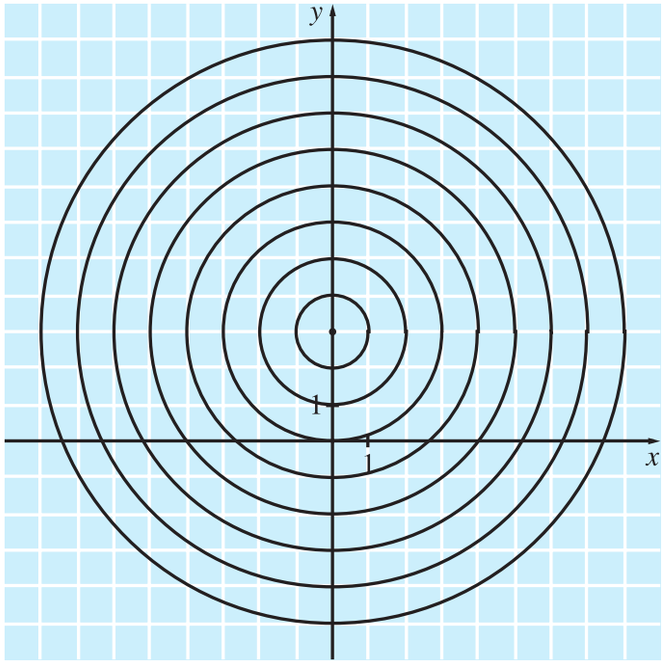
myös silloin, kun
a) suora on $x$-akselin suuntainen (eli $A = 0$)
b) suora on $y$-akselin suuntainen (eli $B = 0$).

**305.** Seuraava väite pitää paikkansa: Jos tasakylkisen kolmion kannalta valitaan piste ja lasketaan pisteen kolmion kyljistä mitattujen etäisyyksien summa, niin summan arvo on valitusta pisteestä riippumatta aina sama.
Osoita väite oikeaksi
a) analyyttisen geometrian menetelmillä laskemalla kannan pisteen etäisyydet kyljistä
b) tavallisen tasogeometrian menetelmillä yhdistämällä kannan piste huippuun ja laskemalla koko kolmion pinta-ala kahden kolmion pinta-alan summana.

# Paraabeli

**Ongelma**

Kuvion ympyröiden keskipiste on $(0, 3)$ ja säteet $1$, $2$, $3$ jne. Merkitse koordinaatistoon pisteitä, jotka ovat yhtä etäällä pisteestä $(0, 3)$ ja suorasta $y = 1$. Millaisen käyrän pisteet näyttävät muodostavan?




## ESIMERKKI 1

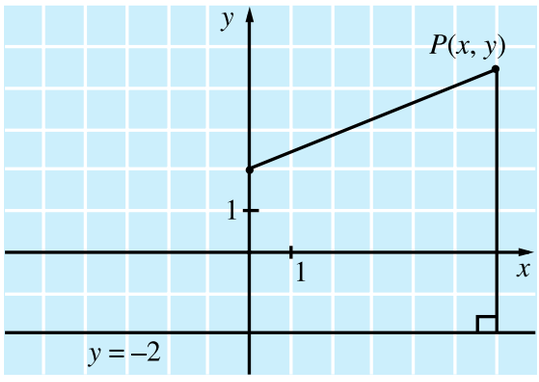
Minkä käyrän muodostavat tason pisteet, joilla on ominaisuus: Piste on yhtä etäällä pisteestä $(0, 2)$ ja suorasta $y = -2$? Piirrä käyrä.

**Ratkaisu**

Pisteen $P(x, y)$ etäisyys pisteestä $(0, 2)$ on

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}.$$

Pisteen $P(x, y)$ etäisyys suorasta $y = -2$ on $y$-koordinaattien $y$ ja $-2$ erotuksen itseisarvo $|y - (-2)| = |y + 2|$.



Pisteen $P(x, y)$ etäisyys pisteestä $(0, 2)$ on yhtä suuri kuin etäisyys suorasta $y = -2$, jos ja vain jos:

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y + 2|$$

Sievennetään yhtälö. Koska yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiiviset, yhtälö säilyy yhtäpitävänä, kun sen molemmat puolet korotetaan neliöön.

$$x^2 + (y-2)^2 = (y+2)^2 \qquad |a|^2 = a^2$$

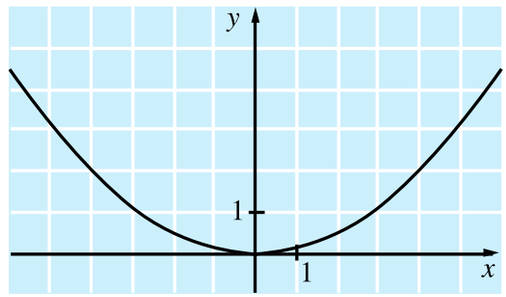
$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4$$

$$-8y = -x^2 \qquad | : (-8)$$

$$y = \frac{x^2}{8}$$

$$y = \frac{1}{8}x^2$$

Yhtälö esittää ylöspäin aukeavaa paraabelia, jonka huippu on origossa.




**Vastaus** paraabelin $y = \frac{1}{8}x^2$

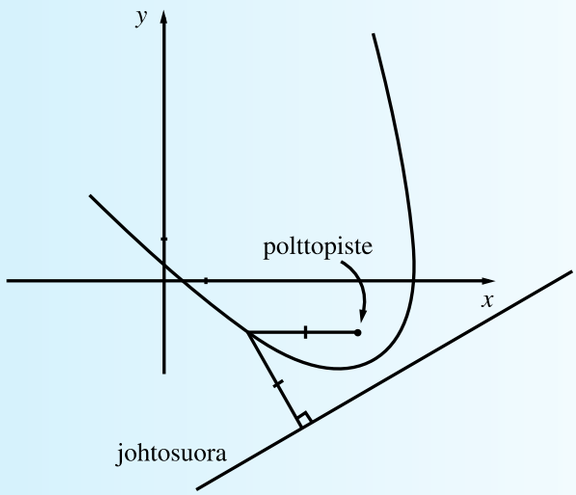
Kurssissa Polynomifunktiot toisen asteen polynomifunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ kuvaajaa kutsuttiin paraabeliksi. Yleisesti paraabeli määritellään edellisessä esimerkissä havaitun geometrisen ominaisuuden perusteella.

### Paraabeli

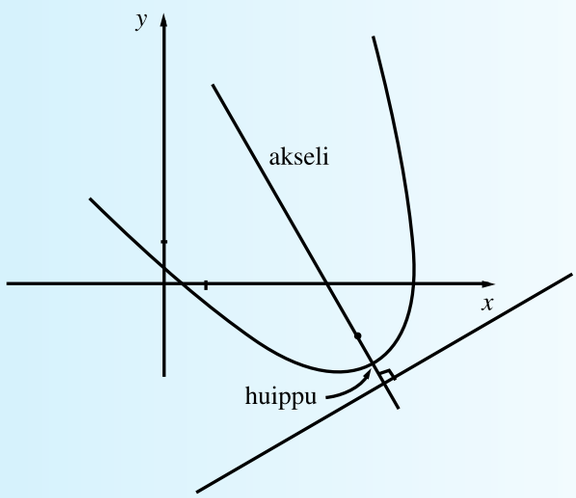
*Paraabeli* on käyrä, jonka pisteet toteuttavat ehdon:

Piste on yhtä etäällä kiinteästä pisteestä ja kiinteästä suorasta.

Kiinteä piste on paraabelin *polttopiste*, ja suora on paraabelin *johtosuora*.*




Paraabeli on symmetrinen polttopisteen kautta kulkevan johtosuoran normaalin suhteen. Suora on paraabelin *akseli*. Akselin ja paraabelin leikkauspiste on paraabelin *huippu*.

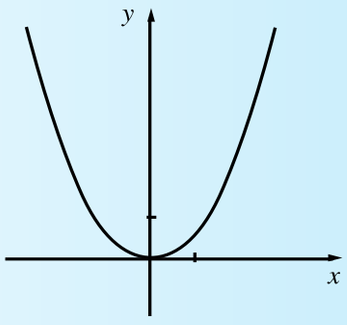



* Sana paraabeli tulee kreikan sanasta *parabole*, rinnakkain asetettu. Nimitys liittyy paraabelin ominaisuuteen niin sanottuna kartioleikkauksena (katso sivu 150).

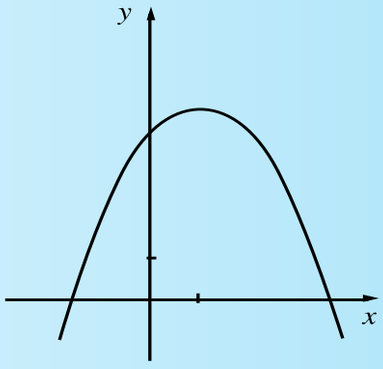
Jos paraabelin akseli on $y$-akselin suuntainen, paraabelin yhtälö on muotoa

$y = ax^2 + bx + c$, missä $a \neq 0$.

Paraabeli aukeaa ylöspäin, jos $a > 0$, ja alaspäin, jos $a < 0$.




$y = ax^2, \ a > 0$

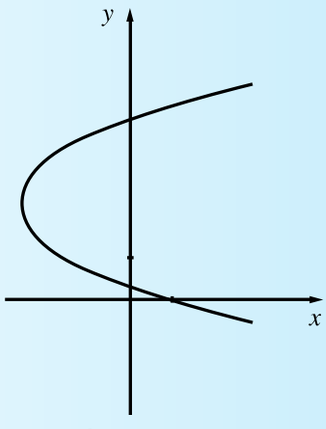



$y = ax^2 + bx + c, \ a < 0$

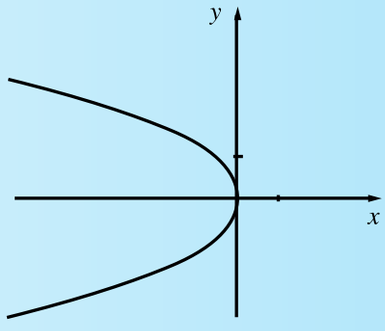
Jos paraabelin akseli on $x$-akselin suuntainen, paraabelin yhtälö on muotoa

$x = ay^2 + by + c$, missä $a \neq 0$.

Paraabeli aukeaa oikealle, jos $a > 0$, ja vasemmalle, jos $a < 0$.*




$x = ay^2 + by + c, \ a > 0$




$x = ay^2, \ a < 0$

* Esimerkki sellaisen paraabelin yhtälöstä, jonka akseli ei ole koordinaattiakselin suuntainen, on tehtävässä 329. Yhtälö on tällöin usein monimutkainen, ja yhtälön tunnistaminen paraabelin yhtälöksi edellyttää lukiokurssin ulkopuolisia tietoja.

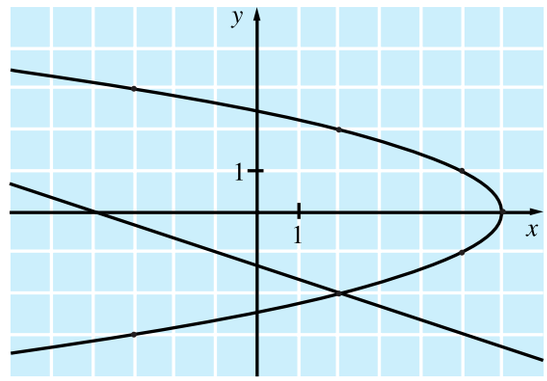
## ESIMERKKI 2

Piirrä käyrä $x + y^2 - 6 = 0$. Missä pisteissä käyrä leikkaa suoran $x + 3y + 4 = 0$?

### Ratkaisu

Yhtälö $x + y^2 - 6 = 0$ voidaan saattaa muotoon $x = -y^2 + 6$. Yhtälö esittää vasemmalle aukeavaa paraabelia, jonka huippu on $x$-akselilla pisteessä $(6, 0)$. Paraabeli voidaan piirtää antamalla $y$:lle muutama arvo ja laskemalla vastaavat $x$:n arvot. Piirtämisessä voidaan käyttää hyväksi paraabelin symmetriaa.*

| $y$ | $x = -y^2 + 6$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 3 | $-3^2 + 6 = -3$ | $(-3, 3)$ |
| 2 | $-2^2 + 6 = 2$ | $(2, 2)$ |
| 1 | $-1^2 + 6 = 5$ | $(5, 1)$ |
| 0 | $6$ | $(6, 0)$ |
| $-1$ | $-(-1)^2 + 6 = 5$ | $(5, -1)$ |




Leikkauspisteet löydetään ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{cases} x + 3y + 4 = 0 \\ x + y^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

Ratkaistaan suoran yhtälöstä toinen muuttuja.

$$x + 3y + 4 = 0$$

$$x = -3y - 4$$

Ratkaistiin $x$, koska paraabelin yhtälössä muuttujan $x$ termi on ensimmäistä astetta.

---

* Piirtäminen graafisella laskimella vaatii $y$:n ratkaisemista paraabelin yhtälöstä.

$$x + y^2 - 6 = 0$$

$$y^2 = 6 - x$$

$y = \sqrt{6 - x}$ tai $y = -\sqrt{6 - x}$

Samaan koordinaatistoon piirretään funktioiden $\sqrt{6 - x}$ ja $-\sqrt{6 - x}$ kuvaajat.

Sijoitetaan lauseke paraabelin yhtälöön.

$x + y^2 - 6 = 0$ Sijoitetaan $x = -3y - 4$.

$-3y - 4 + y^2 - 6 = 0$

$y^2 - 3y - 10 = 0$ Yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavalla.

$y = 5$ tai $y = -2$

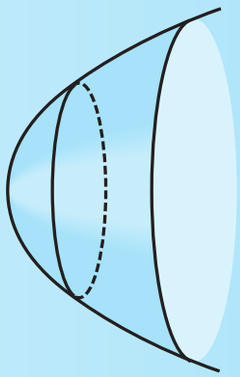
Leikkauspisteiden $x$-koordinaatit saadaan sijoittamalla $y$-koordinaatit yhtälöön $x = -3y - 4$.

$y = 5$: $x = -3 \cdot 5 - 4 = -19$

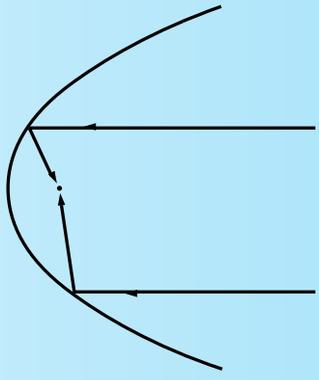
$y = -2$: $x = -3 \cdot (-2) - 4 = 2$

**Vastaus** $(-19, 5)$ ja $(2, -2)$

Kun paraabeli pyörähtää akselinsa ympäri, muodostuva pinta on niin sanottu *paraboloidi*.



Esimerkiksi televisiosatelliitteihin suunnatut lautasantennit ovat paraboloidin muotoisia. Syynä on paraboloidin seuraava ominaisuus: Akselin suuntaisina antenniin tulevat lähetysaallot heijastuvat paraboloidista niin, että kaikki heijastuneet aallot kulkevat polttopisteen kautta. Aallot kootaan yhteen antennin polttopisteessä.



Myös monissa valonheittimissä on paraboloidin muotoinen peili. Heittimen valonlähde on polttopisteessä, josta valo suunnataan peiliin. Heijastuneet valonsäteet lähtevät valonheittimestä yhdensuuntaisina.

## TEHTÄVIÄ

### SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**306.** Minkä käyrän muodostavat ne tason pisteet, joilla on seuraava ominaisuus: Piste on yhtä etäällä pisteestä $(0, 1)$ ja suorasta $y = -1$?

**307.** Mikä paraabelin $x = y^2 - 6y + 5$ aukeamissuunta on? Missä pisteissä paraabeli leikkaa a) $x$-akselin b) $y$-akselin?

**308.** Määritä paraabelin $y = x^2 - 3$ ja suoran $y = x - 1$ leikkauspisteet.

**309.** Mitä käyrää yhtälö esittää?

a) $x^2 + y - 3 = 0$

b) $x + y - 3 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 3 = 0$

d) $x + y^2 - 3 = 0$

**310.** Missä pisteissä paraabelit $y = -x^2 - x + 2$ ja $y = x^2 - 3x - 2$ leikkaavat toisensa?

**311.** a) Piirrä käsin paraabeli $x - y^2 + 4 = 0$. Missä pisteessä paraabelin huippu on?
b) Saata paraabelin yhtälö sellaiseen muotoon, että paraabeli voidaan piirtää graafisella laskimella.

**312.** Määritä paraabeli, jonka akseli on $y$-akselin suuntainen ja joka kulkee pisteiden $(-1, -8)$, $(1, 2)$ ja $(3, 4)$ kautta. (Vihje: Paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$. Sijoita yhtälöön pisteiden koordinaatit ja ratkaise kertoimet $a$, $b$ ja $c$ yhtälöryhmästä.)

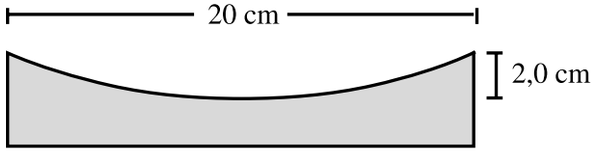
**313.** Missä pisteissä paraabeli $x^2 - y - 1 = 0$ leikkaa ympyrän $x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$? Selvitä ensin leikkauspisteiden lukumäärä kuvion avulla.

**314.** Mikä on paraabelille $y = x^2 - 1$ pisteeseen $(1, 0)$ piirretyn tangentin yhtälö?

**315.** a) Paraabelin polttopiste on $(0, p)$ ja johtosuora suora $y = -p$. Muodosta paraabelin yhtälö.
b) Käytä hyväksesi a-kohdan tulosta ja muodosta yhtälö paraabelille, jonka polttopiste on $(0, \frac{1}{4})$ ja johtosuora suora $y = -\frac{1}{4}$.

c) Määritä paraabelin $y = -3x^2$ polttopiste ja johtosuora.

**316.** Kuvassa on paraboloidin muotoisen peilin poikkileikkaus pitkin paraabelin akselia. Kuinka suuri peilin polttoväli on? Polttoväli on polttopisteen etäisyys paraabelin huipusta.
(Vihje: Sijoita paraabeli koordinaatistoon niin, että sen huippu on origossa ja akselina $y$-akseli. Määritä paraabelin yhtälö ja käytä hyväksi edellisen tehtävän a-kohdan tulosta.)




**317.** Ympyrät kulkevat origon kautta ja sivuavat suoraa $y = -8$. Minkä käyrän ympyröiden keskipisteet muodostavat?

## SARJA II.
## PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**318.** Paraabelin polttopiste on $(0, 2)$ ja johtosuora $y = 4$. Määritä paraabelin yhtälö ja piirrä paraabeli.

**319.** Jos polttopiste on johtosuoralla, käyrä ei ole paraabeli. Minkä käyrän muodostavat ne tason pisteet, joiden etäisyys origosta on yhtä suuri kuin etäisyys $x$-akselista?

**320.** Mitä käyrää yhtälö esittää?

a) $9x - y^2 = 0$

b) $9x^2 - y^2 = 0$

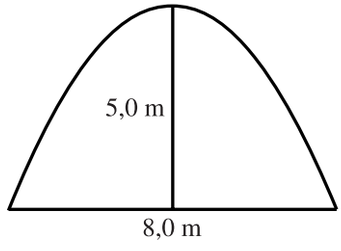
c) $9x^2 - y = 0$

d) $9 - x^2 - y^2 = 0$

**321.** Missä pisteissä paraabeli $x = y^2 - 4y - 5$ leikkaa suoran $2x + y + 6 = 0$?

**322.** Määritä paraabeli, jonka akseli on $y$-akselin suuntainen ja joka kulkee pisteiden $(1, 5)$, $(-1, 0)$ ja $(2, 15)$ kautta.
(Vihje: Kirjoita paraabelin yhtälö muotoon $y = ax^2 + bx + c$ ja muodosta yhtälöryhmä.)

**323.** Maantiesillan aukko on paraabelin muotoinen. Aukon korkeus on 5,0 m ja leveys 8,0 m. Erikoiskuljetuksen leveys on 4,2 m ja korkeus joka kohdasta 3,8 m. Mahtuuko kuljetus kulkemaan sillan alta? Tieliikennelain vaatimilla varoituskilvillä ja -valoilla varustettu erikoiskuljetus voi alittaa sillan myös keskellä tietä.




**324.** Määritä paraabelin $y = -x^2 + 3$ pisteet, joiden etäisyys origosta on 3.

**325.** Määritä paraabelin $y = x^2$ tangentti, joka on suoran $y = x$ suuntainen. Missä pisteessä tangentti sivuaa paraabelia?

**326.** Saata paraabelin $x = y^2 + 3y + 1$ yhtälö sellaiseen muotoon, että paraabeli voidaan piirtää graafisella laskimella.

**327.** Annetaan muuttujalle $t$ arvoja ja lasketaan pisteen $x$- ja $y$-koordinaatit lausekkeilla $x = 3 - t^2$ ja $y = 3 - t$. Minkä käyrän näin lasketut pisteet muodostavat?

**328.** Kuminauhan toinen pää on origossa ja toinen pää liikkuu pitkin paraabelia $y = x^2 + 2$. Minkä käyrän kuminauhan keskipiste piirtää?

**329.** Paraabelin polttopiste on $(1, 1)$ ja johtosuora $x - y - 2 = 0$. Määritä paraabelin yhtälö.

**330.** Minkä käyrän muodostavat tason pisteet, jotka ovat yhtä etäällä $x$-akselista ja ympyrästä $x^2 + y^2 = 4$? Piirrä kuvio.

**331.** Muodosta yhtälö käyrälle, jonka pisteillä on seuraava ominaisuus: Pisteen etäisyys pisteestä $(0, 4)$ on kaksi kertaa niin suuri kuin etäisyys suorasta $y = 1$. Saata yhtälö sellaiseen muotoon, että käyrä voidaan piirtää graafisella laskimella, ja piirrä käyrä.

**332.** Muodosta yhtälö käyrälle, jonka pisteillä on seuraava ominaisuus: Pisteen etäisyys suorasta $y = 4$ on kaksi kertaa niin suuri kuin etäisyys pisteestä $(0, 1)$. Saata yhtälö sellaiseen muotoon, että käyrä voidaan piirtää graafisella laskimella, ja piirrä käyrä.

# Kompleksitason yhtälöitä

## Kompleksiluvut

*Kompleksiluvut* ovat muotoa $x + yi$, missä $x$ ja $y$ ovat reaalilukuja ja $i$ on *imaginaariyksikkö*. Imaginaariyksiköllä $i$ on ominaisuus

$$i^2 = -1.$$

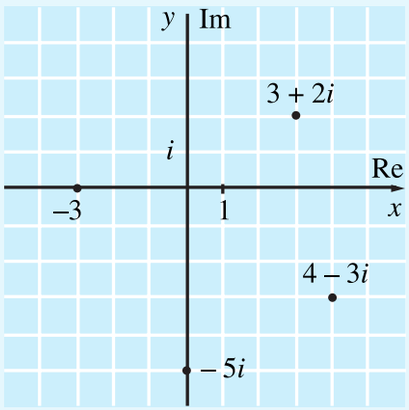
Luku $x$ on kompleksiluvun $x + yi$ *reaaliosa*, ja imaginaariyksikön $i$ kerroin $y$ on luvun *imaginaariosa.*

Kompleksiluvun $7 - i$ reaaliosa on $7$ ja imaginaariosa $-1$.

Jos reaaliosa on nolla, kompleksiluku on *puhtaasti imaginaarinen*. Jos imaginaariosa on nolla, kompleksiluku on *reaalinen* (reaaliluku).

Kompleksiluku $9i$ on puhtaasti imaginaarinen. Kompleksiluku $-6$ on reaalinen.

Kompleksiluvut muodostavat *kompleksitason.* Kompleksilukua $x + yi$ vastaa piste $(x, y)$.




## Kompleksilukujen yhteen-, vähennys- ja kertolasku

Kompleksiluvuilla yhteen-, vähennys- ja kertolaskussa käytetään tavallisia laskulakeja ja imaginaariyksikön ominaisuutta $i^2 = -1$.

### Esimerkki 1

Laske kompleksilukujen $z_1 = 3 + 2i$ ja $z_2 = -1 + 4i$ erotus ja tulo.

### Ratkaisu

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (3 + 2i) - (-1 + 4i) = 3 + 2i + 1 - 4i \\ &= 4 - 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (3 + 2i)(-1 + 4i) \\ &= 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 4i + 2i \cdot (-1) + 2i \cdot 4i \\ &= -3 + 12i - 2i + 8i^2 \\ &= -3 + 12i - 2i + 8 \cdot (-1) \\ &= -11 + 10i \end{aligned}$$

### Vastaus

$z_1 - z_2 = 4 - 2i, \quad z_1 \cdot z_2 = -11 + 10i$

**333.** Olkoon $z_1 = 4 - 3i$ ja $z_2 = -2 + 5i$. Laske

a) $z_1 + z_2$ b) $2z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$.

**334.** Kompleksiluvuilla laskettaessa voidaan käyttää tavallisia muistikaavoja.
Laske muistikaavojen avulla

a) $(5 - 3i)^2$ b) $(5 - 3i)(5 + 3i)$.

## Kompleksiluvun liittoluku ja kompleksilukujen jakolasku

Kompleksiluku jaetaan reaaliluvulla niin, että reaaliosa ja imaginaariosa jaetaan samalla luvulla.

Esimerkiksi $\dfrac{2-12i}{3} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{12}{3}i = \dfrac{2}{3} - 4i.$

Jotta voitaisiin laskea minkä tahansa kahden kompleksiluvun osamäärä, on ensin määriteltävä kompleksiluvun liittoluku:

Kompleksiluvun $z = x + yi$ *liittoluku* on luku

$$\boxed{\overline{z} = x - yi.}$$

Siis liittoluku muodostetaan vaihtamalla imaginaariosan merkki.

Kompleksiluvun $z = 3 - 5i$ liittoluku on $\overline{z} = 3 + 5i$.
Luvun $7i$ liittoluku on $-7i$, ja
luvun $-5$ liittoluku on luku itse.

Lasketaan luvun $z = x + yi$ ja liittoluvun $\overline{z} = x - yi$ tulo.

$z\overline{z} = (x + yi)(x - yi)$ $\qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$= x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2 i^2$

$= x^2 - y^2 \cdot (-1) = x^2 + y^2$

Siis jos $z = x + yi$, niin

$$\boxed{z\overline{z} = x^2 + y^2.}$$

Esimerkiksi, jos $z = -1 + 3i$,
niin $z\overline{z} = (-1)^2 + 3^2 = 10$.

Kun kompleksiluku kerrotaan liittoluvullaan, tulos on aina reaalinen. Liittoluvun avulla voidaan sieventää kahden kompleksiluvun osamäärä laventamalla imaginaariyksikkö $i$ pois nimittäjästä.

### Esimerkki 2

Sievennä a) $\dfrac{1}{3-2i}$ b) $\dfrac{-6+5i}{3+i}$.

### Ratkaisu

a) $\dfrac{1}{3-2i}$ Lavennetaan nimittäjän liittoluvulla $3 + 2i$.

$= \dfrac{3+2i}{(3+2i)(3-2i)}$

$= \dfrac{3+2i}{3^2 + (-2)^2} = \dfrac{3+2i}{13}$

$= \dfrac{3}{13} + \dfrac{2}{13}i$

b) $\dfrac{-6+5i}{3+i}$ Lavennetaan nimittäjän liittoluvulla $3 - i$.

$= \dfrac{(-6+5i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$

$= \dfrac{-18+6i+15i+5}{3^2+1^2}$

$= \dfrac{-13+21i}{10} = -\dfrac{13}{10} + \dfrac{21}{10}i$

### Vastaus

a) $\dfrac{3}{13} + \dfrac{2}{13}i$ b) $-\dfrac{13}{10} + \dfrac{21}{10}i$*

---

* Tässä vähän oikaistiin, sillä luvun käänteislukua ja kahden kompleksiluvun osamäärää ei varsinaisesti määritelty. Kertolaskulla voidaan tarkistaa, että a-kohdassa saatu luku $\dfrac{3}{13} + \dfrac{2}{13}i$ todella on luvun $3 - 2i$ käänteisluku eli että lukujen tulo on $1$.
Samoin voidaan tarkistaa, että luku $-\dfrac{13}{10} + \dfrac{21}{10}i$ on lukujen $-6 + 5i$ ja $3 + i$ osamäärä eli että $(3+i)(-\dfrac{13}{10} + \dfrac{21}{10}i) = -6 + 5i$.

**335.** Olkoon $z = -1 + 2i$. Sievennä luku $\frac{1}{z}$.

Tarkista, että luku on todella luvun $z$ käänteisluku suorittamalla kertolasku $z \cdot \frac{1}{z}$.

**336.** Sievennä a) $\frac{2-4i}{3+5i}$ b) $\frac{3+6i}{-2i}$.

## Kompleksimuuttujan z yhtälö

Yleinen tapa ratkaista kompleksimuuttujan $z$ yhtälöitä on sijoittaa yhtälöön $z = x + yi$, sieventää yhtälön molemmat puolet ja käyttää hyväksi seuraavaa kompleksilukujen ominaisuutta:

> Kompleksiluvut ovat yhtä suuret, jos ja vain jos niiden reaaliosat ovat yhtä suuret ja niiden imaginaariosat ovat yhtä suuret.

Siis $x_1 + y_1 i = x_2 + y_2 i$, jos ja vain jos $x_1 = x_2$ ja $y_1 = y_2$.

Ominaisuutta soveltamalla saadaan yhtälöpari, josta ratkaistaan reaaliosa $x$ ja imaginaariosa $y$.

### Esimerkki 3

Ratkaise yhtälö $z - 2i\bar{z} = 5 - 4i$.

### Ratkaisu

Merkitään $z = x + yi$, missä $x$ ja $y$ ovat reaalilukuja. Sijoitetaan ja sievennetään.

$z - 2i\bar{z} = 5 - 4i$ $\qquad z = x + yi,\ \bar{z} = x - yi$

$x + yi - 2i(x - yi) = 5 - 4i$

$x + yi - 2xi + 2yi^2 = 5 - 4i$

$x + yi - 2xi - 2y = 5 - 4i$ Ilmaistaan molemmat puolet muodossa $a + bi$, missä $a$ ja $b$ ovat reaalilukuja.

$x - 2y + (-2x + y)i = 5 - 4i$

Kompleksiluvut ovat yhtä suuret, jos ja vain jos reaaliosat ovat yhtä suuret ja imaginaariosat ovat yhtä suuret. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ -2x + y = -4 \end{cases} \qquad \Big| \cdot 2$$

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ -4x + 2y = -8 \end{cases}$$

$$-3x = -3$$

$$x = 1$$

$$-2 \cdot 1 + y = -4$$

$$y = -2$$

Yhtälön ratkaisu on $z = 1 - 2i$.

### Vastaus

$z = 1 - 2i$

**337.** Ratkaise yhtälö.
a) $3z + \bar{z} = 1 - 4i$ b) $3z + \bar{z} = iz + 3i$

**338.** Ratkaise yhtälö $5z - 2i = i(z - 3i)$.

**339.** Ratkaise yhtälö. a) $z = \bar{z}$
b) $z + \bar{z} = 0$ c) $z + 3\bar{z} = 0$

**340.** Ratkaise yhtälö $z + i\bar{z} = 0$. Havainnollista ratkaisujoukkoa kompleksitasossa.

**341.** Mitkä kompleksitason pisteet toteuttavat yhtälön $iz + \bar{z} = 1 + i$? Piirrä kuvio.

### Esimerkki 4

Ratkaise yhtälö $z^2 + 4\bar{z} = -5$.

### Ratkaisu

Merkitään $z = x + yi$.

$$z^2 + 4\bar{z} = -5$$

$$(x + yi)^2 + 4(x - yi) = -5$$

$$x^2 + 2xyi - y^2 + 4x - 4yi = -5$$

$$x^2 - y^2 + 4x + (2xy - 4y)i = -5$$

Muodostetaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 4x = -5 \\ 2xy - 4y = 0 \end{cases}$$

Jälkimmäinen yhtälö toteutuu, kun:

$$2xy - 4y = 0$$

$$2y(x - 2) = 0$$

$$y = 0 \text{ tai } x = 2$$

Sijoitetaan yhtälöparin ensimmäiseen yhtälöön $y = 0$:

$$x^2 - 0^2 + 4x = -5$$

$$x^2 + 4x = -5$$

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

Koska yhtälön diskriminantti
$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$
on negatiivinen, yhtälöllä ei ole reaalijuuria. Samaan havaintoon päädytään, jos yhtälöä ryhdytään ratkaisemaan.

Sijoitetaan yhtälöparin ensimmäiseen yhtälöön $x = 2$.

$$2^2 - y^2 + 4 \cdot 2 = -5$$

$$y^2 = 17$$

$$y = \sqrt{17} \text{ tai } y = -\sqrt{17}$$

Yhtälö $z^2 + 4\bar{z} = -5$ toteutuu, kun
$z = 2 + \sqrt{17}\,i$ tai $z = 2 - \sqrt{17}\,i$.

### Vastaus

$z = 2 + \sqrt{17}\,i$ tai $z = 2 - \sqrt{17}\,i$

**342.** Ratkaise yhtälö $z^2 + 2\bar{z} = 0$.

**343.** Ratkaise yhtälö $z^2 = -2i$.

**344.** Ratkaise yhtälö $\bar{z} = \frac{2}{z} - i$.

**345.** Mitkä kompleksitason pisteet toteuttavat yhtälön $z\bar{z} = z + \bar{z}$? Piirrä kuvio.

**346.** Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} z\bar{z} = 2 \\ z - \bar{z} = i(z + \bar{z}). \end{cases}$$

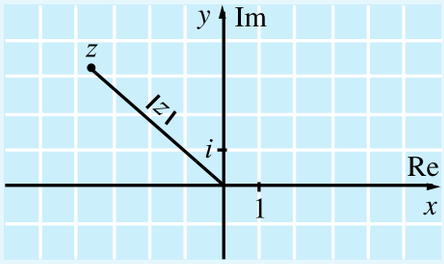
**347.** Kompleksimuuttujan $z$ toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat reaalilukuja, voidaan ratkaista paitsi yhtälöparilla myös käyttäen $i$:n määritelmää tai toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa. Esimerkiksi yhtälö $z^2 = -9$ toteutuu, kun $z = 3i$ tai $z = -3i$.
Ratkaise yhtälö.

a) $z^2 = -25$ b) $z^2 = -5$

c) $z^2 + 3z + 4 = 0$ d) $z^2 - 2z + 5 = 0$

## Kompleksiluvun itseisarvo ja kahden kompleksiluvun etäisyys

Kompleksiluvun *itseisarvo* on kompleksiluvun etäisyys origosta (kompleksiluvusta 0) kompleksitasossa. Kompleksiluvun $z$ itseisarvo merkitään $|z|$.




Jos $z = x + yi$, niin käyttämällä tason pisteiden etäisyyden kaavaa saadaan

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Esimerkiksi kompleksiluvun $5 - 12i$ itseisarvo on

$$|5 - 12i| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13.$$

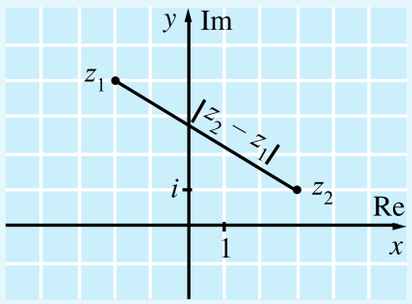
**348.** Määritä kompleksiluvun itseisarvo.

a) $1 - i$ b) $-12 + 5i$ c) $7i$ d) $-3$

Kuten lukusuoralla niin myös kompleksitasossa kahden luvun etäisyys on niiden erotuksen itseisarvo. Jos nimittäin luvut $z_1 = x_1 + y_1 i$ ja $z_2 = x_2 + y_2 i$ tulkitaan tason pisteiksi, niiden etäisyys on $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Lauseke on erotuksen $z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)i$ itseisarvo $|z_2 - z_1|$.

Siis kompleksilukujen $z_1 = x_1 + y_1 i$ ja $z_2 = x_2 + y_2 i$ *etäisyys* on

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$




Esimerkiksi kompleksilukujen $z_1 = -2 + 4i$ ja $z_2 = 3 + i$ etäisyys on

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (1 - 4)^2}$$
$$= \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34} \approx 5{,}8.$$

**349.** Määritä lukujen etäisyys.

a) $4 + i$ ja $1 - i$ b) $-4 - 3i$ ja $1 + 9i$

c) $-4$ ja $5i$ d) $-2i$ ja $6i$

Kompleksilukujen avulla monet tasokäyrät voidaan ilmaista yksinkertaisella tavalla.

### Esimerkki 5

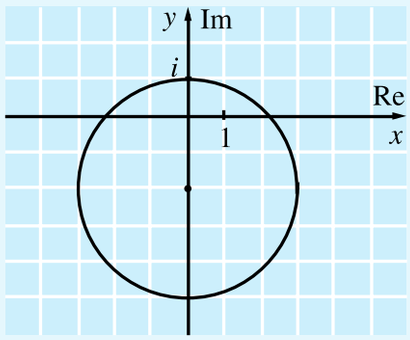
Mitä käyrää yhtälö esittää?

a) $|z| = 4$ b) $|z + 2i| = 3$

### Ratkaisu

a) Yhtälön $|z| = 4$ toteuttavat kompleksitason pisteet, joiden etäisyys origosta on 4. Yhtälö esittää ympyrää, jonka keskipiste on origo ja säde 4.

b) Yhtälö $|z + 2i| = 3$ voidaan kirjoittaa muotoon $|z - (-2i)| = 3$. Yhtälön toteuttavat pisteet, joiden etäisyys luvusta $-2i$ on 3. Yhtälö esittää ympyrää, jonka keskipiste on $-2i$ ja säde 3.




### Vastaus

a) Ympyrää, jonka keskipiste on origo ja säde 4.

b) Ympyrää, jonka keskipiste on $-2i$ ja säde 3.

**350.** Mitä käyrää yhtälö esittää?

a) $|z| = 1$

b) $|z - i| = 5$

c) $|z + 3 - i| = 2$

Piirrä c-kohdan käyrä.

**351.** Mitä käyrää yhtälö $|z + iz| = 2$ esittää? (Ohje: Sijoita $z = x + yi$.)

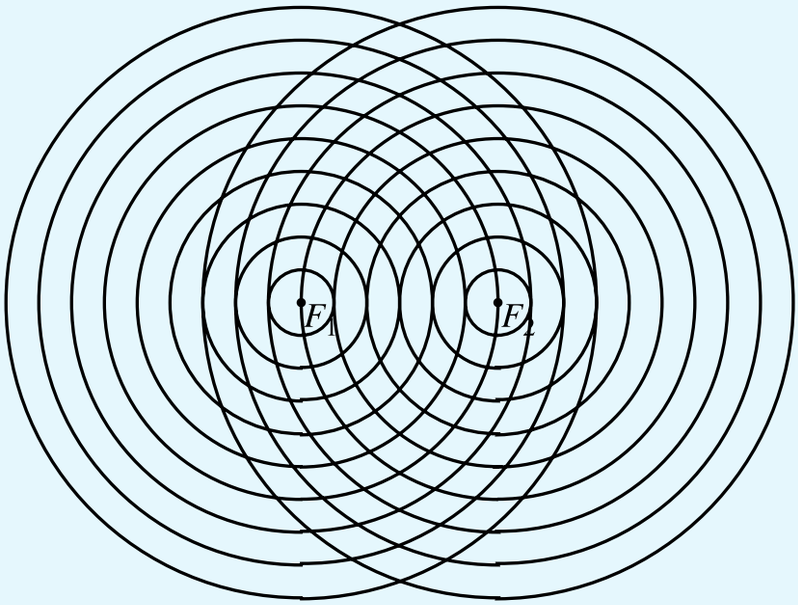
**352.** Mitä käyrää yhtälö $|z - 4| = |z - 2i|$ esittää? Piirrä käyrä.

**353.** Mitä käyrää yhtälö $|2z - i| = |z - \bar{z}|$ esittää?

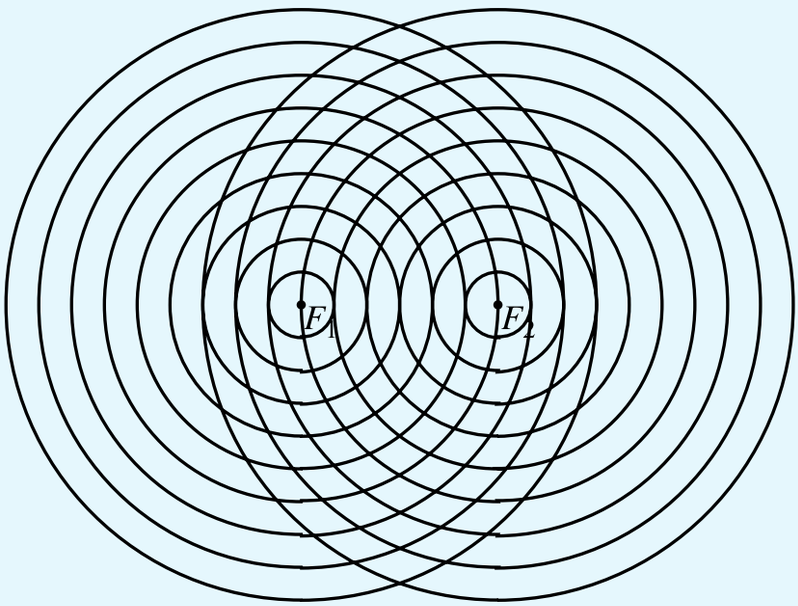
## Ellipsi ja hyperbeli

**Ongelma.** Seuraavissa kuviossa on pisteet $F_1$ ja $F_2$ keskipisteinä piirrettyjä ympyröitä, joiden säteet suurenevat aina yhdellä. Pisteiden $F_1$ ja $F_2$ etäisyys on $6$ yksikköä.

a) Merkitse kuvioon kaikki ne ympyröiden leikkauspisteet, joiden pisteistä $F_1$ ja $F_2$ mitattujen etäisyyksien summa on $8$. Yhdistä pisteet sopivasti kaartuvalla viivalla.

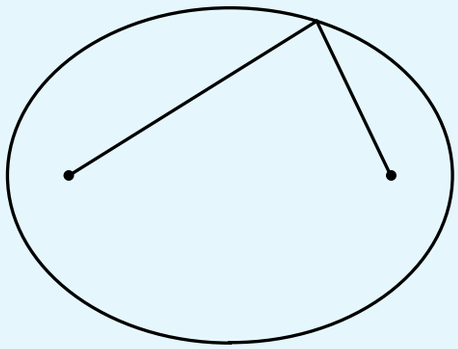



b) Merkitse kuvioon kaikki ne ympyröiden leikkauspisteet, joiden pisteistä $F_1$ ja $F_2$ mitattujen etäisyyksien erotus on $4$. Yhdistä pisteet sopivasti kaartuvalla viivalla. Merkitse edelleen ja yhdistä viivalla ne pisteet, joiden pisteistä $F_1$ ja $F_2$ mitattujen etäisyyksien erotus on $-4$.



## Ellipsi

Niiden pisteiden joukko, joiden kahdesta pisteestä (*polttopisteistä*) mitattujen etäisyyksien (*polttosäteiden*) summa on vakio, on *ellipsi*.



**354.** Piirrä ellipsi seuraavasti: Kiinnitä langan päät paperiin painettuihin nastoihin (polttopisteet). Kiristä lanka kynällä ja piirrä ellipsi pitämällä lanka koko ajan kireällä. Tutki, kuinka polttopisteiden etäisyyden ja polttosäteiden summan (langan pituuden) muuttaminen vaikuttaa ellipsin muotoon.

Kun ympyrää katsotaan sivusta, se näkyy ellipsinä. Kun poikkileikkaukseltaan pyöreä makkara leikataan vinosti, leikkauskuvio on ellipsi. Kun ympyrä piirretään graafisella laskimella, ympyrä piirtyy ellipsin muotoisena, jos akselien yksiköt ovat eri suuret. Planeettojen radat Auringon ympäri ovat ellipsejä, joiden toisessa polttopisteessä on Auringon keskipiste. Tämän huomasi Johannes Kepler (1571–1630). Isaac Newton (1642–1727) osoitti, että radan muoto on seuraus hänen löytämästään painovoimalaista.

**355.** Yhtälö $4x^2 + y^2 = 16$ esittää koordinaattiakselien suhteen symmetristä ellipsiä.
a) Missä pisteissä ellipsi leikkaa koordinaattiakselit? Kun leikkauspisteiden kautta piirretään koordinaattiakselien suuntaiset suorat, muodostuu suorakulmio. Ellipsi sivuaa suorakulmion sivuja. Hahmottele ellipsi suorakulmioon.
b) Ratkaise ellipsin yhtälöstä $y$. Piirrä ellipsi graafisella laskimella tai laskemalla joitain ellipsin pisteitä.

Yhtälö

$$Ax^2 + Bx^2 = C,$$

missä nollasta poikkeavat kertoimet $A$, $B$ ja $C$ ovat samanmerkkiset ja lisäksi kertoimet $A$ ja $B$ ovat eri suuret ($A \neq B$), esittää ellipsiä, jonka polttopisteet ovat jommallakummalla koordinaattiakselilla symmetrisesti origon suhteen.*

Esimerkiksi yhtälöt
$2x^2 + 3y^2 = 10$ ja $18x^2 + 6y^2 = 1$
esittävät ellipsiä.

**356.** a) Missä pisteissä ellipsi $9x^2 + 25y^2 = 225$ leikkaa koordinaattiakselit?
b) Ratkaise yhtälöstä $y$ ja piirrä ellipsi graafisella laskimella tai laskemalla joitain käyrän pisteitä.

**357.** Missä pisteissä suora $x - y + 4 = 0$ leikkaa ellipsin $9x^2 + 16y^2 = 100$? Piirrä kuvio.

---

* Taulukkokirjoissa ellipsin yhtälö annetaan yleensä muodossa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, jolloin vielä oletetaan, että $a > 0$ ja $b > 0$. Muodossa ovat suoraan näkyvillä ellipsin ja koordinaattiakselien leikkauspisteet $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ ja $(0, -b)$.
Esimerkiksi tehtävän 355 ellipsin $4x^2 + y^2 = 16$ yhtälö saadaan tähän muotoon jakamalla luvulla 16, jolloin yhtälö on $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$.

**358.** Tässä tehtävässä muodostetaan ellipsin yhtälö lähtien ellipsin määritelmästä. Muodostetaan yhtälö käyrälle, jonka pisteet täyttävät ehdon: pisteistä $(-1, 0)$ ja $(1, 0)$ laskettujen etäisyyksien summa on 3.

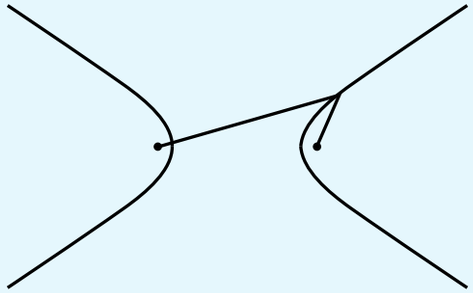
a) Muodosta lausekkeet pisteen $(x, y)$ etäisyyksille pisteistä $(-1, 0)$ ja $(1, 0)$ ja ilmaise etäisyysehto yhtälönä.

b) Järjestä yhtälöä niin, että toisella puolella on pelkkä neliöjuurilauseke, korota yhtälö toiseen potenssiin ja järjestä taas neliöjuurilauseke yhtälön toiselle puolelle.

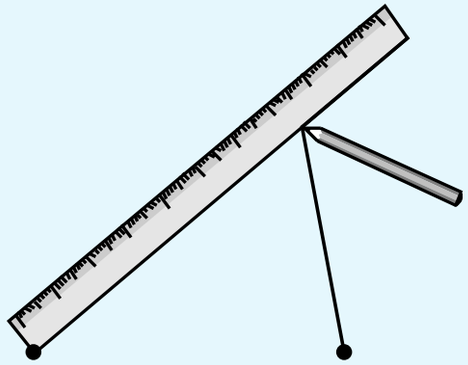
c) Korota yhtälö toiseen potenssiin ja sievennä.

## Hyperbeli

Niiden pisteiden joukko, joiden kahdesta pisteestä (*polttopisteistä*) mitattujen etäisyyksien (*polttosäteiden*) erotuksen itseisarvo on vakio, on *hyperbeli*. Hyperbeli muodostuu kahdesta erillisestä haarasta.



**359.** Piirrä hyperbeli seuraavasti: Kiinnitä viivaimen kulma toiseen polttopisteeseen. Kiinnitä langan päät viivaimen toiseen päähän ja toiseen polttopisteeseen. Kuljeta kynää pitkin viivaimen reunaa niin, että lanka pysyy koko ajan kireänä. Kuinka hyperbelin toinen haara piirretään? Mikä on muodostuvan hyperbelin polttosäteiden erotus? Tutki, kuinka langan pituuden muuttaminen vaikuttaa hyperbelin muotoon.



**360.** Yhtälö $4x^2 - y^2 = 16$ esittää koordinaattiakselien suhteen symmetristä hyperbeliä.

a) Missä pisteissä hyperbeli leikkaa koordinaattiakselit?

b) Ratkaise yhtälöstä $y$ ja piirrä hyperbeli.

Yhtälö

$$Ax^2 + Bx^2 = C,$$

missä kaikki kertoimet ovat eri suuria kuin nolla ja kertoimet $A$ ja $B$ ovat erimerkkiset, esittää hyperbeliä, jonka polttopisteet ovat jommallakummalla koordinaattiakselilla symmetrisesti origon suhteen.*

Esimerkiksi yhtälöt
$12x^2 - 3y^2 = 16$ ja $5x^2 - 21y^2 = -1$
esittävät hyperbeliä.

**361.** Ratkaise hyperbelin yhtälöstä $y$ ja piirrä hyperbeli.
a) $9x^2 - 4y^2 = -36$ b) $9x^2 - 4y^2 = 36$

Yhtälö

$$xy = k \quad (k \neq 0)$$

esittää origon suhteen symmetristä hyperbeliä, jonka polttopisteet ovat $k$:n merkistä riippuen joko suoralla $y = x$ tai $y = -x$.

**362.** Piirrä käsin hyperbeli $xy = k$, kun
a) $k = 4$ b) $k = -4$.

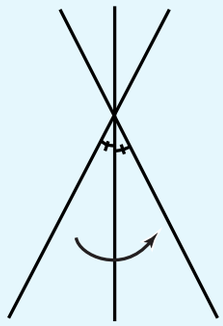
**363.** Missä pisteissä suora $y = 4x + 3$ leikkaa hyperbelin $xy = 1$? Piirrä kuvio.

**364.** Mitä käyrää yhtälö esittää?
a) $3x^2 - 5y^2 = 12$ b) $3x^2 + 3y^2 = 12$
c) $5x^2 + 3y^2 = 12$ d) $5x^2 - 3y^2 = -12$

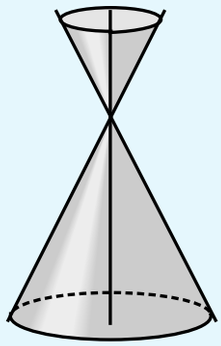
---

* Taulukkokirjoissa hyperbelin yhtälö on
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ja $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.

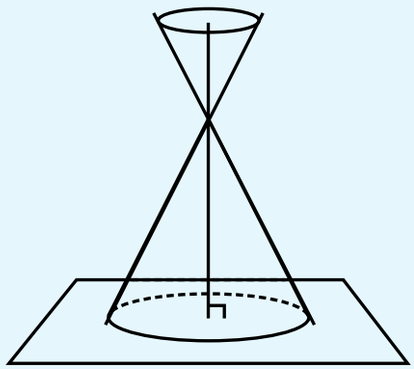
Kreikkalaiset matemaatikot tunsivat ellipsin, paraabelin ja hyperbelin 200-luvulla ennen ajanlaskun alkua. Matemaatikko Apollonios kokosi aikansa tietämyksen näistä *kartioleikkauksiksi* nimitetyistä käyristä teokseensa *Konika*. Nimitys kartioleikkaus johtuu siitä, että kreikkalaiset huomasivat kaikkien näiden käyrien olevan tason ja suoran ympyräkartiopinnan leikkauskuvioita.



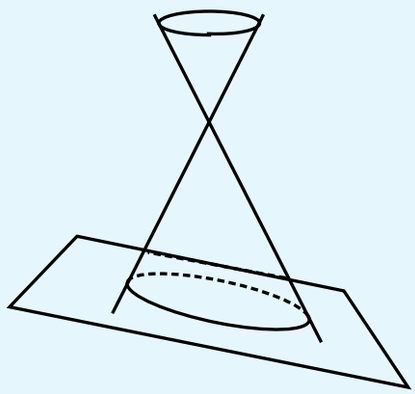
Kartiopinta syntyy, kun kaksi toisensa leikkaavaa suoraa pyörähtää suorien välisen kulman puolittajan ympäri. Kulman puolittajaa kutsutaan kartiopinnan *akseliksi*.



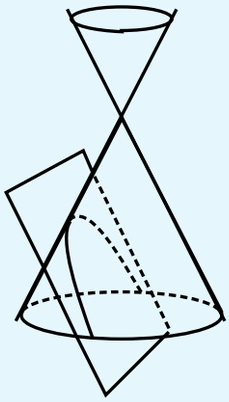
Kun kartiopinta leikataan tasolla, joka on kohtisuorassa akselia vastaan, leikkauskuvio on ympyrä.



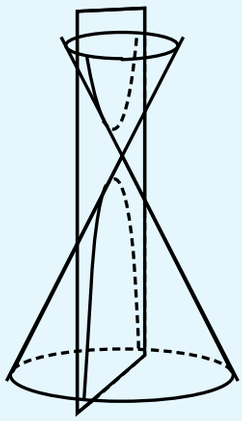
Kun taso kallistuu, leikkauskuvio on aluksi ellipsi.



Kun taso on kartion sivuviivan suuntainen, leikkauskuvio on paraabeli.



Kun taso leikkaa kartiopinnan molemmat osat, leikkauskuvio on hyperbeli.



Näin selittyvät myös sanojen ellipsi, paraabeli ja hyperbeli alkuperät. Sana ellipsi tulee kreikan sanasta *elleipsis*, vajaaksi jätetty, sana paraabeli sanasta *parabole*, rinnakkain asetettu, ja sana hyperbeli sanasta *hyperbole*, liikamäärä, liioittelu.

**365.** Piste, suora ja kaksi toisensa leikkaavaa suoraa ovat niin sanottuja surkastuneita kartioleikkauksia. Kuinka ne muodostuvat?

**366.** Joistakin valolähteistä, esimerkiksi taskulampuista, lähtevä valokiila on kartion muotoinen. Suuntaa tällainen valolähde niin, että valokartion seinälle piirtämä kuvio on a) ympyrä b) ellipsi c) paraabeli d) hyperbelin haara.

# Kertaus

Tässä luvussa kerrataan koko kurssi yksityiskohtaisten esimerkkien avulla. Teorian ja menetelmien kertauksen jälkeen on kertaustehtäviä, jotka ovat samojen otsikoiden mukaan järjestettyjä perustehtäviä. Kertausluku päättyy tehtäväsarjoihin, jotka sisältävät pääosin vaativampia tehtäviä koko kurssin alueelta.

## Itseisarvo

Luvun $a$ itseisarvo $|a|$ on luvun etäisyys luvusta nolla lukusuoralla. Epänegatiivisen luvun itseisarvo on luku itse. Negatiivisen luvun itseisarvo on luvun vastaluku.

Jos $a \geqslant 0$, niin $|a| = a$.

Jos $a < 0$, niin $|a| = -a$.

$|-4 + \pi| = -(-4 + \pi) = 4 - \pi$,
sillä $-4 + \pi \approx -0{,}86 < 0$.

Lukujen $a$ ja $b$ etäisyys lukusuoralla on lukujen erotuksen itseisarvo $|a - b|$.

Lukujen $-3$ ja $1 - \pi$ etäisyys on

$|-3 - (1 - \pi)| = |-4 + \pi| = 4 - \pi$.

## Itseisarvoyhtälöt- ja epäyhtälöt

Yhtälö $|f(x)| = a$, missä $a \geqslant 0$, toteutuu, kun funktion $f$ arvo on $a$ tai $a$:n vastaluku:

$f(x) = a$ tai $f(x) = -a$.

$|3x - 7| = 5$

$3x - 7 = 5$ tai $3x - 7 = -5$

$3x = 12$ tai $3x = 2$ $\quad | : 3$

$x = 4$ tai $x = \frac{2}{3}$

Epäyhtälö $|f(x)| < a$, missä $a > 0$, toteutuu, kun funktion $f$ arvo on lukusuoralla $-a$:n ja $a$:n välissä:

$-a < f(x) < a$.

eli

$f(x) > -a$ ja $f(x) < a$

$|4x + 1| < 7$

$-7 < 4x + 1 < 7$ $\quad | - 1$

$4x + 1 > -7$ ja $4x + 1 < 7$

$4x > -8$ ja $4x < 6$

$x > -2$ ja $x < \frac{3}{2}$

$-2 < x < \frac{3}{2}$

Epäyhtälö $|f(x)| > a$, missä $a > 0$, toteutuu, kun funktion $f$ arvo on lukusuoralla $-a$:n vasemmalla puolella tai $a$:n oikealla puolella:

$f(x) < -a$ tai $f(x) > a$.

$|2x + 3| > 1$

$2x + 3 < -1$ tai $2x + 3 > 1$ $\quad | - 3$

$2x < -4$ tai $2x > -2$ $\quad | : 2$

$x < -2$ tai $x > -1$

Yhtälö $|f(x)| = |g(x)|$ toteutuu, kun funktioiden $f$ ja $g$ arvot ovat yhtä suuret tai toistensa vastaluvut.

$f(x) = g(x)$ tai $f(x) = -g(x)$

$|x + 3| = |x - 4|$

$x + 3 = x - 4$ tai $x + 3 = -(x - 4)$

$3 = -4$ tai $x + 3 = -x + 4$

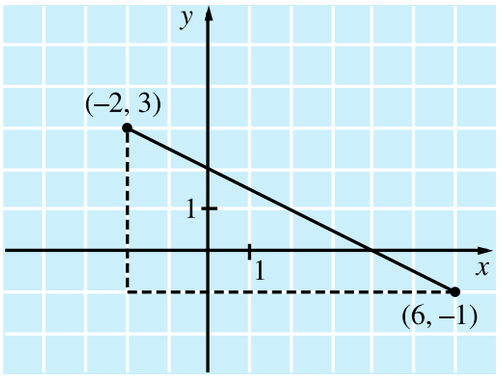
epätosi tai $x = \frac{1}{2}$

Yhtälön juuri on $x = \frac{1}{2}$.

## Etäisyys tasossa

Pisteiden $(x_1, y_1)$ ja $(x_2, y_2)$ etäisyys (pisteitä yhdistävän janan pituus) voidaan laskea Pythagoraan lauseen avulla tai suoraan kaavalla $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Lasketaan $x$-koordinaattien erotuksen neliö ja $y$-koordinaattien erotuksen neliö. Pisteiden etäisyys on neliöiden summan neliöjuuri.




Pisteiden $(-2, 3)$ ja $(6, -1)$ etäisyys on

$$\sqrt{(-2-6)^2 + (3-(-1))^2}$$
$$= \sqrt{(-8)^2 + 4^2}$$
$$= \sqrt{80} \approx 8{,}9.$$

Janan keskipisteen $x$-koordinaatti on päätepisteiden $x$-koordinaattien keskiarvo ja $y$-koordinaatti päätepisteiden $y$-koordinaattien keskiarvo.

Pisteitä $(-7, 5)$ ja $(-16, 19)$ yhdistävän janan keskipisteen koordinaatit ovat

$$x = \frac{-7 + (-16)}{2} = \frac{-23}{2} = -11\frac{1}{2}$$

ja

$$y = \frac{5 + 19}{2} = 12.$$

Janan keskipiste on $(-11\frac{1}{2}, 12)$.

## Ympyrän yhtälö

Piste $(x, y)$ on ympyrällä, jonka keskipiste on $(a, b)$ ja säde $r$, jos ja vain jos pisteen etäisyys keskipisteestä on säteen suuruinen eli jos ja vain jos

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r.$$

Korottamalla molemmat puolet neliöön saadaan ns. keskipistemuotoinen yhtälö ympyrälle, jonka keskipiste on $(a, b)$ ja säde $r$.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Jos ympyrän keskipiste on $(-3, 5)$ ja säde $8$, ympyrän yhtälö on

$$(x-(-3))^2 + (y-5)^2 = 8^2$$

eli

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 64.$$

Yhtälö $x^2 + (y+1)^2 = 13$

voidaan saattaa muotoon

$$(x-0)^2 + (y-(-1))^2 = 13.$$

Yhtälö esittää ympyrää, jonka keskipiste on $(0, -1)$. Koska $r^2 = 13$, ympyrän säde on $\sqrt{13}$.

Jos suoritetaan neliöönkorotukset ja siirretään kaikki termit vasemmalle puolelle, ympyrän yhtälö tulee muotoon

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

Jos ympyrän yhtälö on annettu tässä muodossa, keskipiste ja säde saadaan selville saattamalla yhtälö keskipistemuotoon.

Vakiotermi siirretään oikealle puolelle ja vasen puoli täydennetään keskipistemuotoisen yhtälön mukaiseksi kahden neliön summaksi.

Jotta yhtälö säilyisi yhtäpitävänä, samat luvut on lisättävä myös yhtälön oikealle puolelle.

$$x^2 + y^2 - x + 6y + \frac{17}{4} = 0$$

$$x^2 - x + y^2 + 6y = -\frac{17}{4}$$

Lisätään kertoimien 1 ja 6 puolikkaiden neliöt.

$$x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + 6y + 3^2 = -\frac{17}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3^2$$

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 + (y + 3)^2 = 5$$

Yhtälö esittää ympyrää, jonka keskipiste on $(\frac{1}{2}, -3)$ ja säde $\sqrt{5}$.

Muotoa

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

oleva yhtälö ei välttämättä esitä ympyrää. Yhtälö saattaa esittää yhtä pistettä tai se ei esitä mitään.

Yhtälö

$$x^2 + y^2 + 6x + 13 = 0$$

saadaan neliöksi täydentämällä muotoon

$$(x + 3)^2 + y^2 = -4.$$

Koska kahden neliön summa ei koskaan ole negatiivinen, yhtälöä eivät toteuta minkään tason pisteen koordinaatit.

## Suoran kulmakerroin

Kun siirrytään suoran pisteestä toiseen pisteeseen, suhde

$$\frac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}}$$

on aina yhtä suuri. Suhde on suoran kulmakerroin.

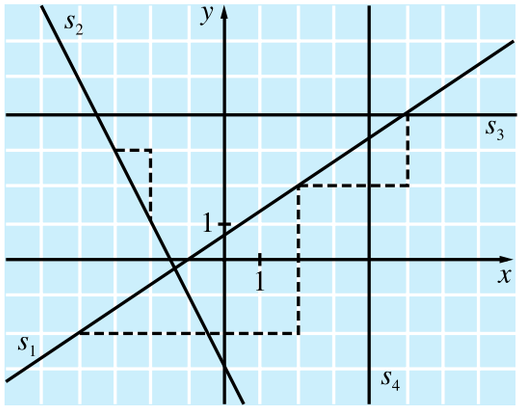
Nousevan suoran kulmakerroin on positiivinen ja laskevan suoran kulmakerroin on negatiivinen.

Koska $y$-akselin suuntaisella suoralla $x$-koordinaatin muutos on aina $0$, $y$-akselin suuntaisella suoralla ei ole kulmakerrointa.

Pisteiden $(x_1, y_1)$ ja $(x_2, y_2)$ (missä $x_1 \neq x_2$) kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos ja vain jos niiden kulmakertoimet ovat yhtä suuret.




Suoran $s_1$ kulmakerroin on $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Suoran $s_2$ kulmakerroin on $\frac{-2}{1} = -2$.

$x$-akselin suuntaisen suoran $s_3$ kulmakerroin on $0$.

$y$-akselin suuntaisella suoralla $s_4$ ei ole kulmakerrointa.

Pisteiden $(4, -1)$ ja $(-3, 2)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$\frac{2 - (-1)}{-3 - 4} = -\frac{3}{7}.$$

Pisteiden $(4, -1)$ ja $(18, -7)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

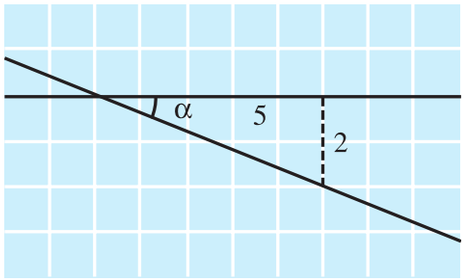
$$\frac{-7 - (-1)}{18 - 4} = \frac{-6}{14} = -\frac{3}{7}.$$

Edelliset suorat ovat keskenään yhdensuuntaiset. Molemmat suorat kulkevat pisteen $(4, -1)$ kautta, joten ne ovat sama suora. Pisteet $(4, -1)$, $(-3, 2)$ ja $(18, -7)$ ovat siis samalla suoralla.

Suoran suuntakulma ilmaisee, kuinka monta astetta ja mihin kiertosuuntaan suoran suunta poikkeaa $x$-akselin suunnasta. Nousevan suoran suuntakulma on positiivinen ja laskevan suoran negatiivinen.

Suoran suuntakulma voidaan määrittää, kun tunnetaan suoran kulmakerroin.

Suoran kulmakerroin on $-\frac{2}{5}$. Määritetään suoran suuntakulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.




Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan suuntakulman itseisasrvo.

$$\tan \alpha = \frac{2}{5}$$

$$\alpha \approx 21{,}8°$$

Siis suoran suuntakulma on noin $-21{,}8°$.

Suuntakulma on tavallisen kulmakäsitteen yleistys, niin sanottu suunnattu kulma. Kulmakertoimen merkistä riippumatta suuntakulma $\alpha$ saadaan yhtälöstä

$$\tan \alpha = k.$$

Edellisen suoran suuntakulma voidaan laskea suoraan:

$$\tan \alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\alpha \approx -21{,}8°$$

## Suoran yhtälö

$y$-akselin suuntaisella suoralla ei ole kulmakerrointa. Suoran yhtälö päätellään:
Piste $(x, y)$ on pisteen $(x_0, y_0)$ kautta kulkevalla $y$-akselin suuntaisella suoralla, jos ja vain jos pisteen $(x, y)$ $x$-koordinaatti on $x_0$, eli

$x = x_0$.

Pisteen $(-2, 6)$ kautta kulkevan $y$-akselin suuntaisen suoran yhtälö on

$x = -2$.

Jos suora kulkee pisteen $(x_0, y_0)$ kautta ja suoran kulmakerroin on $k$, suoran yhtälö on

$y - y_0 = k(x - x_0)$.

Jos suora kulkee pisteen $(-3, 5)$ kautta ja suoran kulmakerroin on $-\frac{1}{4}$, suoran yhtälö on:

$$y - 5 = -\frac{1}{4}(x - (-3))$$

$$y - 5 = -\frac{1}{4}(x + 3)$$

Yhtälö saatetaan usein niin sanottuun ratkaistuun muotoon

$y = kx + b$.

$$y - 5 = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{17}{4}$$

Vakiotermistä $b$ nähdään suoran ja $y$-akselin leikkauspiste $(0, b)$.

Suora leikkaa $y$-akselin pisteessä $(0, \frac{17}{4})$.

Jos suoran yhtälön kaikki termit siirretään vasemmalle puolelle, yhtälö tulee ns. yleiseen muotoon

$Ax + By + C = 0$.

$$y - 5 = -\frac{1}{4}(x + 3) \qquad \mid \cdot 4$$

$$4(y - 5) = -1(x + 3)$$

$$4y - 20 = -x - 3$$

$x + 4y - 17 = 0$

Muotoa $Ax + By + C = 0$ oleva yhtälö esittää aina suoraa, kunhan ainakin toinen kertoimista $A$ ja $B$ on eri suuri kuin $0$.

Yhtälö $3x + 15 = 0$ voidaan saattaa muotoon $x = -5$. Kyseessä on $y$-akselin suuntainen suora.
Yhtälö $5y - 1 = 0$ voidaan saattaa muotoon $y = \frac{1}{5}$. Kyseessä on $x$-akselin suuntainen suora.

Suoran $3x - 2y - 4 = 0$ kulmakerroin saadaan selville saattamalla yhtälö ratkaistuun muotoon:

$$3x - 2y - 4 = 0$$
$$-2y = -3x + 4 \qquad \big| : (-2)$$
$$y = \frac{3}{2}x - 2$$

Suoran kulmakerroin on $\frac{3}{2}$, ja suora leikkaa $y$-akselin pisteessä $(0, -2)$.

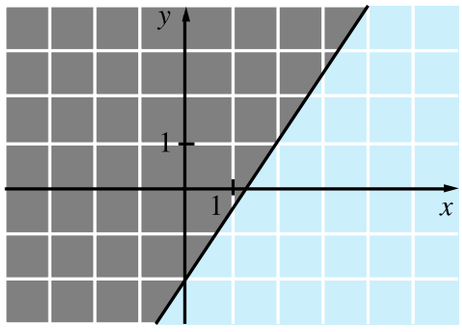
Kahden muuttujan epäyhtälö

$Ax + By + C > 0$ (tai $< 0$)

toteutuu suoran $Ax + By + C = 0$ jommallakummalla puolella.

$3x - 2y - 4 < 0$

$$-2y < -3x + 4 \qquad \big| : (-2) < 0$$
$$y > \frac{3}{2}x - 2 \qquad \text{Suunta vaihtuu.}$$




Epäyhtälön toteuttavat suoran $y = \frac{3}{2}x - 2$ yläpuolella olevien pisteiden koordinaatit.

## Lineaarinen yhtälöryhmä

Lineaarinen yhtälöpari ratkaistaan eliminoimalla toinen muuttuja. Eliminoiminen voidaan suorittaa ns. yhteenlaskumenetelmällä. Yhtälöt kerrotaan sopivilla luvuilla niin, että toisen tuntemattoman kertoimiksi tulevat vastaluvut.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 7 & \mid \cdot 3 \\ 5x + 3y = 10 & \mid \cdot (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 6y = 21 \\ -10x - 6y = -20 \end{cases}$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Kun yhtälöt tämän jälkeen lasketaan yhteen, saadaan yhden tuntemattoman yhtälö.

Toinen tuntematon ratkaistaan toistamalla yhteenlaskumenetelmä tai sijoittamalla saatu ratkaisu jompaankumpaan yhtälöparin yhtälöön.

Sijoitetaan $x = \frac{1}{2}$ yhtälöparin ensimmäiseen yhtälöön.

$$4 \cdot \frac{1}{2} + 2y = 7$$

$$2 + 2y = 7$$

$$2y = 5$$

$$y = \frac{5}{2}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{5}{2}$.

Yhtälöparin ratkaisu tarkistetaan sijoittamalla luvut kumpaankin yhtälöparin yhtälöön.

Muuttuja voidaan eliminoida myös sijoitusmenetelmällä. Ensin ratkaistaan toinen yhtälö jommankumman muuttujan suhteen. Muuttujalle saatu lauseke sijoitetaan toiseen yhtälöön.

Yhtälöparin

$$\begin{cases} 3x - 5y = 17 \\ x - 4y = 1 \end{cases}$$

jälkimmäisestä yhtälöstä on yksinkertaista ratkaista $x$: $x = 1 + 4y$.

Sijoitetaan $x$:lle saatu lauseke ensimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned} 3(1 + 4y) - 5y &= 17 \\ 3 + 12y - 5y &= 17 \\ 7y &= 14 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $y = 2$ lausekkeeseen $x = 1 + 4y$.
Saadaan $x = 1 + 4 \cdot 2 = 9$.

Yhtälöparin ratkaisu on $x = 9$, $y = 2$.

Lineaarisen yhtälöparin ratkaiseminen tarkoittaa aina geometrisesti kahden suoran leikkauspisteen määrittämistä. Jos yhtälöiden esittämät suorat ovat yhdensuuntaiset (eivätkä ne ole sama suora), niin yhtälöparilla ei ole ratkaisua. Yhtälöt saattavat myös olla saman suoran eri muodossa olevia yhtälöitä, jolloin yhtälöparin toteuttavat kaikkien tällä suoralla olevien pisteiden koordinaatit.

Kun yhtälöparissa

$$\begin{cases} x - 3y - 12 = 0 \\ y = \frac{1}{3}x - 4 \end{cases}$$

$y$:n lauseke sijoitetaan ensimmäiseen yhtälöön, saadaan:

$$\begin{aligned} x - 3(\tfrac{1}{3}x - 4) - 12 &= 0 \\ x - x + 12 - 12 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ &\text{tosi} \end{aligned}$$

Yhtälöparin toteuttavat suoran

$y = \frac{1}{3}x - 4$ kaikkien pisteiden koordinaatit.

Yhtälöryhmä, jossa on kolme yhtälöä ja kolme tuntematonta, ratkaistaan muodostamalla yhtälöistä kaksi yhtälöparia, joista eliminoidaan sama tuntematon.

Määritetään yhtälöryhmän avulla pisteiden $(4, -1)$, $(2, 3)$ ja $(-2, 1)$ kautta kulkevan ympyrän yhtälö. Yhtälö on muotoa $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Pisteiden koordinaattien tulee toteuttaa yhtälö:

$$\begin{cases} 4^2 + (-1)^2 + a \cdot 4 + b \cdot (-1) + c = 0 \\ 2^2 + 3^2 + a \cdot 2 + b \cdot 3 + c = 0 \\ (-2)^2 + 1^2 + a \cdot (-2) + b \cdot 1 + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a - b + c = -17 & \mid \cdot 1 \\ 2a + 3b + c = -13 & \mid \cdot (-1) \\ -2a + b + c = -5 & \mid \cdot (-1) \end{cases}$$

Muodostetaan yhtälöparit ensimmäisestä ja toisesta yhtälöstä sekä ensimmäisestä ja kolmannesta yhtälöstä ja eliminoidaan molemmista yhtälöpareista $c$.

$$\begin{array}{l} 4a - b + c = -17 \\ -2a - 3b - c = 13 \\ \hline 2a - 4b = -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4a - b + c = -17 \\ 2a - b - c = 5 \\ \hline 6a - 2b = -12 \end{array}$$

Näin saadaan yhtälöpari kahden muun tuntemattoman ratkaisemiseksi.

$$\begin{cases} 2a - 4b = -4 & \mid : (-2) \\ 6a - 2b = -12 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} -a + 2b = 2 \\ 6a - 2b = -12 \\ \hline 5a = -10 \\ a = -2 \end{array}$$

Sijoitetaan $a = -2$ yhtälöön $-a + 2b = 2$.

$$-(-2) + 2b = 2$$

$$2b = 0$$

$$b = 0$$

Sijoittamalla edelleen nämä johonkin kolmen tuntemattoman yhtälöön, saadaan selville kolmas tuntematon.

Sijoitetaan $a = -2$ ja $b = 0$ yhtälöön $-2a + b + c = -5$.

$$-2 \cdot (-2) + 0 + c = -5$$
$$c = -9$$

Siis $a = -2$, $b = 0$ ja $c = -9$, joten ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$.

## Ympyrän leikkauspisteitä

Suoran ja ympyrän leikkauspisteet ratkaistaan sijoitusmenetelmällä. Ensin ratkaistaan suoran yhtälö jommankumman muuttujan suhteen.

Ratkaistaan, missä pisteessä suora $2x - y = 0$ leikkaa ympyrän, jonka keskipiste on $(4, 1)$ ja säde $\sqrt{10}$. Ympyrän yhtälö on
$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 10$ eli
$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$.

Yhtälöparin

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

suoran yhtälöstä ratkaistaan $y = 2x$ ja $y$:lle saatu lauseke sijoitetaan ympyrän yhtälöön.

$$x^2 + (2x)^2 - 8x - 2 \cdot 2x + 7 = 0$$
$$x^2 + 4x^2 - 8x - 4x + 7 = 0$$
$$5x^2 - 12x + 7 = 0$$

Ratkaisukaavalla saadaan

$x = 1$ tai $x = \frac{7}{5}$.

Leikkauspisteiden $y$-koordinaatit ovat

$2 \cdot 1 = 2$ ja $2 \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{5}$.

Leikkauspisteet ovat $(1, 2)$ ja $(1\frac{2}{5}, 2\frac{4}{5})$.

Kun ratkaistaan kahden ympyrän leikkauspisteitä, toisen ympyrän yhtälö kerrotaan luvulla $-1$.

Kun yhtälöt lasketaan yhteen, saadaan ensimmäisen asteen yhtälö, joka ratkaistaan toisen muuttujan suhteen. Jatketaan kuten ratkaistaessa suoran ja ympyrän leikkauspisteitä.

Saatu lauseke sijoitetaan jompaankumpaan ympyrän yhtälöön.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 2y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y - 15 = 0 \end{cases} \quad \big| \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 2y - 5 = 0 \\ -x^2 - y^2 - 2x + 4y + 15 = 0 \end{cases}$$

$$2x + 6y + 10 = 0 \quad \big| : 2$$

$$x + 3y + 5 = 0$$

$$x = -3y - 5$$

Sijoitetaan $x$:lle saatu lauseke ensimmäiseen ympyrän yhtälöön.

$$(-3y - 5)^2 + y^2 + 4(-3y - 5) + 2y - 5 = 0$$

$$9y^2 + 30y + 25 + y^2 - 12y - 20 + 2y - 5 = 0$$

$$10y^2 + 20y = 0$$

$$10y(y + 2) = 0$$

$$10y = 0 \text{ tai } y + 2 = 0$$

$$y = 0 \text{ tai } y = -2$$

Leikkauspisteiden $x$-koordinaatit ovat

$-3 \cdot 0 - 5 = -5$ ja $-3 \cdot (-2) - 5 = 1$.

Leikkauspisteet ovat $(-5, 0)$ ja $(1, -2)$.

## Suorien kohtisuoruus

Suorat, joiden kulmakertoimet ovat $k_1$ ja $k_2$, missä $k_1 \neq 0$ ja $k_2 \neq 0$, ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, jos ja vain jos suorien kulmakertoimien tulo on $-1$.

$$k_1 k_2 = -1$$

Suorat $y = -3x - 5$ ja $y = \frac{1}{3}x + 17$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, koska kulmakertoimien tulo on $-1$:

$$-3 \cdot \frac{1}{3} = -1.$$

Jos suoran kulmakerroin on $k$, missä $k \neq 0$, suoran normaalin kulmakerroin voidaan ratkaista yhtälöllä tai päätellä suoraan: normaalin kulmakerroin on kulmakertoimen $k$ käänteisluvun vastaluku $-\frac{1}{k}$.

Suoralle $y = -\frac{2}{5}x - 1$ pisteen $(2, 4)$ kautta piirretyn normaalin kulmakerroin on kulmakertoimen $-\frac{2}{5}$ käänteisluvun vastaluku $\frac{5}{2}$.
Normaalin yhtälö on
$y - 4 = \frac{5}{2}(x - 2)$ eli $y = \frac{5}{2}x - 1$.

Koordinaattiakselin suuntaisen suoran normaali on toisen koordinaattiakselin suuntainen.

Suoralle $x = 6$ pisteen $(-7, 2)$ kautta piirretyn normaalin yhtälö on $y = 2$.

## Pisteen etäisyys suorasta

Pisteen $(x_0, y_0)$ etäisyys suorasta $Ax + By + C = 0$ on

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Lasketaan pisteen $(-4, 1)$ etäisyys suorasta $y = 2x - 3$. Suoran yhtälö saatetaan ensin yleiseen muotoon $2x - y - 3 = 0$. Etäisyys on

$$\frac{|2 \cdot (-4) - 1 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-12|}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \approx 5{,}4.$$

Etäisyyskaavan avulla voidaan muun muassa määrittää ympyrän tangentteja.

Suora sivuaa ympyrää $(x-2)^2+(y-4)^2=5$, jos ja vain jos suoran etäisyys ympyrän keskipisteestä $(2, 4)$ on yhtä suuri kuin ympyrän säde $\sqrt{5}$. Piste $(3, 1)$ on ympyrän ulkopuolella, joten sen kautta kulkee kaksi ympyrän tangenttia. Määritetään tangenttien yhtälöt.

Pisteen $(3, 1)$ kautta kulkevan suoran (paitsi $y$-akselin suuntaisen suoran) yhtälö on

$$y-1=k(x-3)$$

eli

$$kx-y+1-3k=0.$$

Suoran etäisyyden keskipisteestä $(2, 4)$ tulee olla $\sqrt{5}$.

$$\frac{|k\cdot 2-4+1-3k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

$$\frac{|-k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5}$$

$$|-k-3|=\sqrt{5}\,\sqrt{k^2+1}$$

$$|k+3|=\sqrt{5}\,\sqrt{k^2+1}$$

$$(k+3)^2=5(k^2+1)$$

$$k^2+6k+9=5k^2+5$$

$$4k^2-6k-4=0$$

Ratkaisukaavalla saadaan

$k=2$ tai $k=-\frac{1}{2}$.

Tangentit ovat suorat

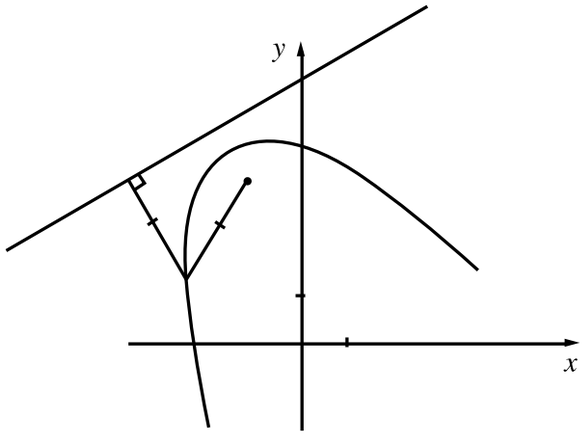
$y-1=2(x-3)$ ja $y-1=-\frac{1}{2}(x-3)$

eli suorat

$y=2x-5$ ja $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.

## Paraabeli

Tason pisteet, jotka ovat yhtä etäällä suorasta (johtosuora) ja pisteestä (polttopiste), muodostavat paraabelin.




Johdetaan yhtälö käyrälle, jonka pisteillä on ominaisuus: piste on yhtä etäällä suorasta $x = -2$ ja pisteestä $(2, 0)$.

Merkitään pisteen $(x, y)$ etäisyydet suorasta $x = -2$ ja pisteestä $(2, 0)$ yhtä suuriksi.

$$|x - (-2)| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2}$$

$$|x + 2| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$(x+2)^2 = (x-2)^2 + y^2$$

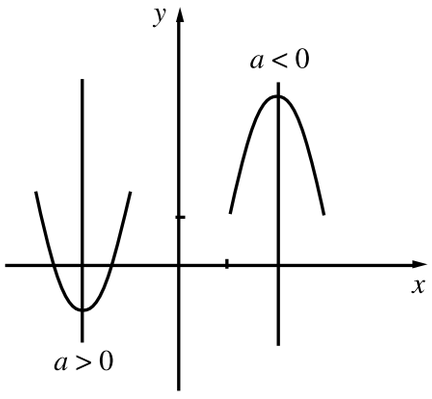
$$x^2 + 4x + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2$$

$$8x = y^2$$

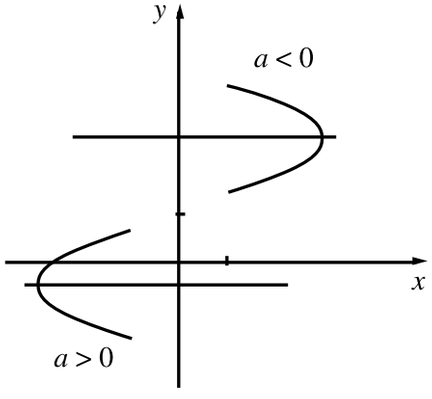
$$x = \frac{1}{8}y^2$$

Käyrä on oikealle aukeava paraabeli, jonka huippu on origossa.

Jos paraabelin akseli on $y$-akselin suuntainen, paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$. Jos akseli on $x$-akselin suuntainen, paraabelin yhtälö on muotoa $x = ay^2 + by + c$. Paraabelin aukeamissuunta riippuu toisen asteen kertoimen $a$ merkistä.




$y = ax^2 + bx + c$




$x = ay^2 + by + c$

Muodostetaan sen paraabelin yhtälö, jonka akseli on $y$-akselin suuntainen ja joka kulkee pisteiden $(0, 0)$, $(2, 10)$ ja $(-1, 4)$ kautta.

Paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$. Sijoitetaan pisteiden koordinaatit yhtälöön.

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 10 \\ a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ 4a + 2b + c = 10 \\ a - b + c = 4 \end{cases}$$

Siis $c = 0$.

$$\begin{cases} 4a + 2b = 10 \quad | : 2 \\ a - b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + b = 5 \\ a - b = 4 \end{cases}$$

$$3a = 9$$

$$a = 3$$

Sijoitetaan $a = 3$ yhtälöön $a - b = 4$.

$$3 - b = 4$$
$$b = -1$$

Siis $a = 3$, $b = -1$ ja $c = 0$,
joten paraabelin yhtälö on $y = 3x^2 - x$.

## KERTAUSTEHTÄVIÄ

Tehtävät ovat kertausluvun otsikoiden mukaan järjestettyjä perustehtäviä.

### ITSEISARVO

**367.** Mikä on luvun $3 - \sqrt{10}$ a) itseisarvo b) etäisyys luvusta $4 - \sqrt{15}$ ?

### ITSEISARVOYHTÄLÖ- JA EPÄYHTÄLÖ

**368.** Ratkaise yhtälö $|x + 3| = 4$.

**369.** Millä $a$:n arvoilla lukujen $3a - 1$ ja $a + 5$ etäisyys on 4?

**370.** Ratkaise epäyhtälö.

a) $|3x - 7| < 2$

b) $|2x + 11| \geqslant 3$

**371.** Ratkaise yhtälö.

a) $|x + 6| = |x|$

b) $|3x - 7| = 5|x + 1|$

### ETÄISYYS TASOSSA

**372.** Laske pisteiden etäisyys.

a) $(-2, 3)$ ja $(-1, -3)$

b) $(-13, -11)$ ja $(-17, -11)$

c) $(-69, -100)$ ja $(50, -220)$

**373.** Kolmion kärkipisteet ovat origo, piste $A(-2, 3)$ ja piste $B(6, 2)$. Kuinka pitkä on kolmion origosta piirretty keskijana?

**374.** Janan keskipiste on $(2, -3)$ ja toinen päätepiste $(-4, 3)$. Mikä janan toinen päätepiste on?

**375.** Kolmion kärkipisteet ovat $(1, 3)$, $(4, 2)$ ja $(-2, 1)$. Kuinka suuri kolmion pinta-ala on?

### YMPYRÄN YHTÄLÖ

**376.** Ympyrän keskipiste on $(-3, 1)$ ja ympyrä kulkee pisteen $(4, 5)$ kautta. Mikä on ympyrän a) säde b) yhtälö? c) Onko piste $(-3, -7)$ ympyrällä, ympyrän sisällä vai ympyrän ulkopuolella?

**377.** Ympyrän erään halkaisijan päätepisteet ovat $(-8, 7)$ ja $(4, 3)$. Muodosta ympyrän yhtälö.

**378.** Määritä ympyrän keskipiste ja säde.

a) $3x^2 + 3y^2 - 39 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 12x = 0$

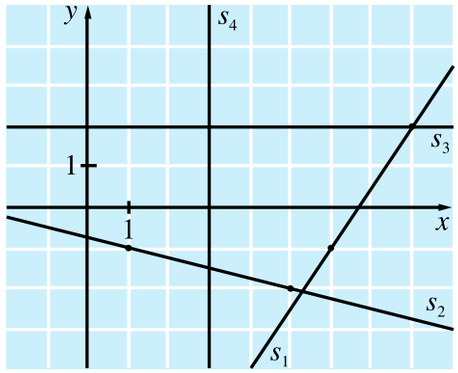
c) $x^2 + y^2 + 6x - 3y - 9 = 0$

**379.** Mikä on pisteen $(8, 4)$ etäisyys ympyrästä $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$?

**380.** Millä $a$:n arvoilla yhtälö $x^2 + y^2 + x + 4y - a = 0$ ei esitä ympyrää?

## SUORAN KULMAKERROIN

**381.** Päättele kuviosta suorien kulmakertoimet.




**382.** Suoran kulmakerroin on $-3$. Kuinka pisteen $y$-koordinaatti muuttuu, kun suoralla liikuttaessa pisteen $x$-koordinaatti
a) kasvaa yhdellä
b) kasvaa viidellä
c) pienenee neljällä?

**383.** Määritä pisteiden
a) $(7, 2)$ ja $(3, 8)$ b) $(4, 8)$ ja $(4, 6)$
c) $(-1, 4)$ ja $(2, -1)$ d) $(3, 9)$ ja $(5, 9)$
kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

**384.** Suora $s_1$ kulkee pisteiden $(5, -1)$ ja $(3, 2)$ kautta, ja suora $s_2$ kulkee pisteiden $(-9, 12)$ ja $(3, -6)$ kautta. Ovatko suorat yhdensuuntaiset?

**385.** Suoran $s_1$ kulmakerroin on 3, ja suoran $s_2$ kulmakerroin on $-\frac{1}{4}$. Määritä asteen kymmenesosan tarkkuudella
a) suoran $s_1$ suuntakulma
b) suoran $s_2$ suuntakulma
c) suorien $s_1$ ja $s_2$ välinen kulma.

## SUORAN YHTÄLÖ

**386.** Muodosta suoran ratkaistussa muodossa oleva yhtälö, kun
a) suora kulkee origon ja pisteen $(-3, 8)$ kautta
b) suora kulkee pisteen $(2, -3)$ kautta ja suoran kulmakerroin on $\frac{1}{2}$
c) suora kulkee pisteiden $(1, -3)$ ja $(4, -2)$ kautta.

**387.** Muodosta pisteen $(-4, 7)$ kautta kulkevan
a) $x$-akselin suuntaisen
b) $y$-akselin suuntaisen
suoran yhtälö.

**388.** Suora kulkee pisteen $(2, -5)$ kautta ja on yhdensuuntainen suoran $4x - 2y - 3 = 0$ kanssa.
a) Muodosta suoran yhtälö.
b) Onko piste $(-17, -43)$ suoralla?
c) Missä pisteissä suora leikkaa koordinaattiakselit?

**389.** Piirrä suora.
a) $x - 4y - 12 = 0$ b) $x + 3 = 0$

**390.** Missä tason osassa epäyhtälö toteutuu?
a) $2x + y - 3 \geqslant 0$ b) $2x - 5y + 1 > 0$

**391.** Kun lukiosta lähetettiin 10 oppilasta myymään konserttilippuja, he saivat kaupaksi 120 lippua. Toisella kerralla 30 oppilasta sai kaupaksi 200 lippua. Oletetaan, että myyjien lukumäärän $x$ ja myytyjen lippujen lukumäärän $y$ välinen riippuvuus on lineaarinen.
a) Määritä riippuvuuden ilmaiseva yhtälö.
b) Kuinka monta myyjää tulee lähettää matkaan, jos halutaan saada kaupaksi 300 lippua?

## LINEAARINEN YHTÄLÖRYHMÄ

**392.** Määritä suorien leikkauspiste.
a) $x - 2y = 3$ ja $4x - y = -3$
b) $5x - 3y + 4 = 0$ ja $3x - 2y - 8 = 0$

**393.** Suorat $y = \frac{1}{3}x - 2$ ja $y = 2x + 8$ rajaavat yhdessä $x$-akselin kanssa kolmion. Laske kolmion pinta-ala.

**394.** Ratkaise yhtälöpari.

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \\ \frac{x}{2} - \frac{3y}{4} = 3 \end{cases}$$

**395.** Kuntoklubi perii jäseniltään liittymismaksun ja kuukausimaksun. Kolme kuukautta jäsenenä ollut Janne on maksanut klubille 160 euroa ja viisi kuukautta klubiin kuulunut Liisa 210 euroa. Kuinka suuria ovat liittymismaksu ja kuukausimaksu?

**396.** Yrityksen 80 miljoonan euron investointihanke rahoitettiin kokonaan lainapääomalla, josta osa on valtion tukemaa 4 %:n lainaa ja loput markkinakorkoista 9 %:n lainaa. Julkistettujen tietojen mukaan koko lainapääomasta joudutaan maksamaan 7 % korkoa. Mikä oli valtion tukeman lainan ja mikä oli markkinakorkoisen lainan määrä?

**397.** Ratkaise yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + 3y - 2z = -3 \end{cases}$$

**398.** Muodosta pisteiden (2, 4), (4, 5) ja (6, 1) kautta kulkevan ympyrän yhtälö.

**399.** Osoita, että yhtälöparilla

$$\begin{cases} ax + 3y = a + 4 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$$

on kaikilla $a$:n arvoilla ainakin yksi ratkaisu. Millä $a$:n arvolla ratkaisuja on enemmän kuin yksi?

## YMPYRÄN LEIKKAUSPISTEITÄ

**400.** Määritä ympyrän $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$ ja suoran $x - y - 3 = 0$ leikkauspisteet.

**401.** Mikä ympyrän $x^2 + y^2 = 8$ piste on lähinnä pistettä $(-15, 5)$?

**402.** Missä pisteissä ympyrät $x^2 + y^2 - x + 2y - 3 = 0$ ja $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ leikkaavat toisensa?

**403.** Osoita, että $y$-akseli sivuaa ympyrää $4x^2 + 4y^2 - 16x + 4y + 1 = 0$. Mikä on sivuamispiste?

**404.** Millä kertoimen $c$ arvoilla suora $y = -x + c$ on ympyrän $x^2 + y^2 = 10$ tangentti?

## SUORIEN KOHTISUORUUS

**405.** Ovatko suorat $15x - 20y + 7 = 0$ ja $16x + 12y - 1 = 0$ toisiaan vastaan kohtisuorassa?

**406.** Pisteen $(-3, 5)$ kautta piirretään normaalit suorille $2x - y + 3 = 0$ ja $y = -2$. Määritä normaalien yhtälöt sekä sen kolmion pinta-ala, jota rajaavat normaalit ja $x$-akseli.

**407.** Millä kertoimen $a$ arvolla suorat $3x - ay = 4$ ja $ax + y = 8$ ovat
a) kohtisuorassa toisiaan vastaan
b) yhdensuuntaiset?

**408.** Määritä ympyrälle $x^2 + y^2 = 13$ pisteeseen $(-2, 3)$ piirretyn tangentin yhtälö.

**409.** Määritä $x$-akselin piste, joka on yhtä etäällä pisteistä $(-2, 3)$ ja $(4, 1)$.

**410.** Kolmion kärkipisteet ovat $A(1, -2)$, $B(5, 0)$ ja $C(5, 4)$. Mikä on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste?

**411.** Mikä ympyrän $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$ piste on lähinnä suoraa $x - 3y + 21 = 0$?

## PISTEEN ETÄISYYS SUORASTA

**412.** Mikä on pisteen $(-2, 3)$ etäisyys suorasta
a) $x + 3y - 4 = 0$
b) $y = \frac{1}{6}x - \frac{2}{3}$
c) $x = 7$?

**413.** Origokeskinen ympyrä sivuaa pisteiden $(0, 5)$ ja $(6, 0)$ kautta kulkevaa suoraa. Mikä ympyrän yhtälö on?

**414.** Osoita, että suoralla $5x - 12y - 13 = 0$ ja ympyrällä $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$ ei ole yhteisiä pisteitä.

**415.** Kuinka suuri on suorien $2x + y = 3$ ja $2x + y = 7$ etäisyys toisistaan?

**416.** Määritä ympyrälle $x^2 + y^2 = 1$ pisteen $(2, 0)$ kautta piirrettyjen tangenttien yhtälöt.

**417.** Mitkä ovat suoran $3x + 4y = 0$ suuntaiset ympyrän $x^2 + y^2 + 6y = 0$ tangentit?

## PARAABELI

**418.** Muodosta yhtälö käyrälle, jonka pisteet ovat yhtä etäällä suorasta $y = 3$ ja pisteestä $(0, -3)$.

**419.** Missä pisteissä paraabelit $y = 3x^2 - 2x + 1$ ja $y = -x^2 + 1$ leikkaavat toisensa?

**420.** Missä pisteissä suora $x + 3y + 5 = 0$ leikkaa paraabelin $y^2 + x - y = 0$?

**421.** Paraabelin akseli on $x$-akselin suuntainen, ja paraabeli kulkee pisteiden $(3, -4)$, $(-5, 0)$ ja $(-2, 6)$ kautta. Mikä paraabelin yhtälö on?

**422.** Määritä paraabelin $y = x^2$ tangentti, joka on suoran $y = 3x$ suuntainen.
Missä pisteessä tangentti sivuaa paraabelia?

## TEHTÄVÄSARJOJA

### SARJA A

**1.** Olkoon $A = (-3, 4)$ ja $B = (1, 5)$. Muodosta
a) pisteiden $A$ ja $B$ kautta kulkevan suoran yhtälö
b) janan $AB$ keskinormaalin yhtälö.

**2.** Mikä suorien $2x - 5y + 10 = 0$ ja $x - y + 1 = 0$ leikkauspisteen kautta kulkeva suora leikkaa $x$-akselin pisteessä $(3, 0)$?

**3.** Vuorokauden keskilämpötila Helsingissä on toukokuun 1. päivänä 5,6 °C ja kesäkuun 1. päivänä 11,8 °C. Keskilämpötila muuttuu näiden päivien välillä likimain suoraviivaisesti. Selvitä lineaarisen mallin avulla, minä päivänä Helsingissä alkaa niin sanottu terminen kesä eli vuorokauden keskilämpötila ylittää 10 °C.

**4.** Ympyrä, jonka säde on 3, vierii pitkin $x$-akselia vasemmalta oikealle ja pysähtyy törmätessään ympyrään $x^2 + y^2 - 12y + 32 = 0$. Mikä ympyrän yhtälöksi tulee?

**5.** Minkä käyrän ne tason pisteet $P$ muodostavat, jotka toteuttavat ehdon: Pisteen $P$ pisteistä $(-3, 0)$ ja $(3, 0)$ mitattujen etäisyyksien neliöiden summa on 26?

**6.** Mistä suoran $y = x + 1$ pisteistä matka suoralle $x + 2y + 2 = 0$ on kaksi kertaa niin pitkä kuin matka suoralle $4x - 2y + 5 = 0$?

### SARJA B

**1.** Kolmion kärkipisteet ovat $(1, -2)$, $(5, 4)$ ja $(-3, 6)$. Kolmion sivujen keskipisteet yhdistetään. Määritä näin muodostuneen kolmion piiri ja pinta-ala.

**2.** Mikä suoran $2x + 5y - 10 = 0$ pisteistä on lähinnä pistettä $(-3, 9)$?

**3.** Ympyrälle $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ piirretään tangentit pisteisiin, joissa ympyrä leikkaa suoran $y = x - 2$. Määritä tangenttien yhtälöt.

**4.** Janan $AP$ toinen päätepiste on $A(3, 2)$, ja toinen päätepiste $P$ on ympyrällä $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$. Määritä janan $AP$ suurin ja pienin mahdollinen pituus.

**5.** Minkä käyrän muodostavat ne tason pisteet, joiden etäisyys pisteestä $(-3, -1)$ on kaksi kertaa niin suuri kuin etäisyys pisteestä $(3, 2)$?

**6.** Valitaan tasoon uusi $uv$-koordinaatisto, jonka origo on $xy$-koordinaatiston pisteessä $A(2, -3)$ ja jonka $u$-akselina on pisteestä $A$ pisteen $B(11, 0)$ suuntaan kulkeva suora ja $v$-akselina pisteestä $A$ pisteen $C(0, 3)$ suuntaan kulkeva suora. $uv$-koordinaatiston yksikkö on sama kuin $xy$-koordinaatiston.
a) Osoita, että $uv$-koordinaatisto on suorakulmainen.
b) Mitkä ovat pisteiden $B$ ja $C$ koordinaatit $uv$-koordinaatistossa?
c) Mikä on $xy$- ja $uv$-koordinaatistojen origoja yhdistävän suoran yhtälö $uv$-koordinaatistossa?

## SARJA C

**1.** Kioskinpitäjä arvioi, että virvoitusjuomien päivämyynti riippuu suoraviivaisesti lämpötilasta. Päivänä, jonka korkein lämpötila oli $14\ °C$, kioskissa myytiin $80$ pulloa virvoitusjuomia. Kun lämpötila oli $17\ °C$, myynti oli $95$ pulloa.
a) Muodosta riippuvuutta kuvaava yhtälö.
b) Mikä tämän mallin perusteella on myynti hellepäivänä, jonka lämpötila on $25\ °C$?
c) Missä lämpötilassa myynti loppuu kokonaan?

**2.** Anne, Eino ja Iris jakoivat 150 euron palkkion niin, että Anne sai $15$ euroa enemmän kuin Eino ja kaksi kertaa niin paljon kuin Iris. Kuinka paljon kukin sai?

**3.** Määritä vakio $a$ siten, että suorat
$ax + 2y - 3 = 0$ ja $4x - y + 2a = 0$
a) leikkaavat toisensa $y$-akselilla
b) eivät leikkaa toisiaan
c) ovat kohtisuorassa.
Missä pisteessä c-kohdan suorat leikkaavat toisensa?

**4.** Kolmiosta $ABC$ tiedetään seuraavaa: Kärjestä $A$ piirretty korkeusjana kulkee pitkin suoraa $y = x$, kärjestä $A$ piirretty keskijana kulkee pitkin suoraa $y = 3x - 8$, ja kärki $B$ on pisteessä $(0, 2)$. Määritä kolmion kärkipisteet $A$ ja $C$.

**5.** Määritä ympyrä, joka sivuaa positiivisia koordinaattiakseleita ja pisteiden $(8, 0)$ ja $(0, 6)$ kautta kulkevaa suoraa.

**6.** Koordinaatistoon piirretään origon kautta kulkeva suora, joka ei yhdy kumpaankaan koordinaattiakseliin. Suora leikkaa molemmat paraabelit $y = x^2$ ja $y = \frac{1}{2}x^2$ origossa ja lisäksi ensimmäisen paraabelin pisteessä $A$ ja jälkimmäisen pisteessä $B$. Pisteen $A$ kautta piirretään $y$-akselin suuntainen suora ja pisteen $B$ kautta $x$-akselin suuntainen suora. Olkoon $P$ piirrettyjen koordinaattiakselien suuntaisten suorien leikkauspiste. Millä käyrällä kaikki näin saadut pisteet $P$ ovat?

## SARJA D

**1.** Pisteen $(8, -16)$ kautta kulkevan ympyrän keskipiste on $(-7, 4)$. Missä pisteissä ympyrä leikkaa $y$-akselin?

**2.** Määritä sellainen vakion $c$ arvo, että suorat $3x - y + 1 = 0$, $x + y - 5 = 0$ ja $35x - 8y + c = 0$ leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

**3.** Ratkaise yhtälö $|x^2 + 5x| = |5x + 16|$.

**4.** Ympyrän muotoisen järven yhtälö on kartan koordinaatistossa $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$. Mikä on pitkin suoraa $y = -3x + 15$ kulkevan tien lyhin etäisyys järvestä? Koordinaatiston yksikkö on $1$ km.

**5.** Määritä pisteen $(0, 1)$ kautta kulkevat ympyrän $x^2 + y^2 - 4x = 0$ tangentit. Määritä edelleen asteen tarkkuudella tangenttien välinen kulma.

**6.** Paraabelin johtosuora on $x + y + 2 = 0$ ja polttopiste $(1, 1)$. Määritä paraabelin yhtälö.

## SARJA E

**1.** Kolmion $ABC$ kärkipisteet ovat $A(-2, -2)$, $B(3, 1)$ ja $C(-1, 3)$. Kuinka pitkä kärjestä $A$ piirretty kolmion keskijana on?

**2.** Pisteen $(0, -10)$ kautta kulkeva suora rajaa suoran $y = \frac{1}{2}x$ ja $y$-akselin kanssa kolmion, jonka pinta-ala on 20. Määritä suoran yhtälö.

**3.** Mitkä ympyrän $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$ pisteet ovat yhtä etäällä pisteistä $(1, 4)$ ja $(3, 8)$?

**4.** Kuutiometri kuparista ja sinkistä valmistettua metalliseosta painoi 8 210 kg. Laske seoksen kupari- ja sinkkipitoisuudet a) tilavuusprosentteina b) painoprosentteina. Kuparin tiheys on 8 960 kg/m$^3$ ja sinkin 7 130 kg/m$^3$.

**5.** Millä $a$:n arvoilla yhtälö $x^2 + y^2 + 2ax + 2a + 3 = 0$ esittää ympyrää? Millä $a$:n arvoilla piste $(1, 2)$ on tämän ympyrän sisällä?

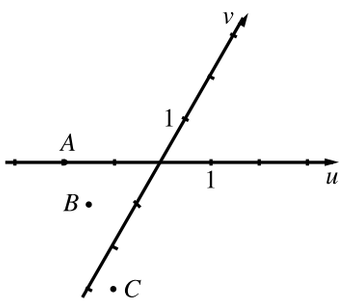
**6.** Paraabeli $y = x^2$ erottaa suoran $y = 2x$ suuntaisista suorista janoja. Osoita, että kaikkien janojen keskipisteet ovat samalla suoralla. Mikä tämän suoran yhtälö on?

# Vastaukset

## Koordinaatisto

**1.** a) Ilmoittamalla kerros, esimerkiksi sijainti $-2{,}5$ on toisen ja kolmannen kellarikerroksen puolivälissä. Tarvitaan yksi luku.
b) Vaihtoehtoisia tapoja:
Ilmoitetaan kuinka pitkän matkan ratakierrosta juoksija on juossut tai kuinka paljon kierroksesta on jäljellä.
Ilmoitetaan kulma, jonka suunta radan keskipisteestä kohti juoksijaa on kiertynyt suunnasta kohti lähtöpaikkaa.
Tarvitaan yksi luku.
c) Vaihtoehtoisia tapoja:
Ilmoitetaan luodon karttakoordinaatit (leveys- ja pituuspiirit).
Ilmoitetaan luodon etäisyys ja kompassisuunta kohti luotoa jostain toisesta kohteesta.
Tarvitaan kaksi lukua.
d) Vaihtoehtoisia tapoja:
Ilmoitetaan ilmapallon korkeus ja alapuolella olevan maanpinnan kohdan karttakoordinaatit.
Ilmoitetaan ilmapallon korkeus maanpinnasta sekä etäisyys ja kompassisuunta pallon alapuolella olevaan maanpinnan kohtaan.
Ilmoitetaan kompassisuunta kohti ilmapalloa, ilmapallon korkeuskulma ja ilmapallon etäisyys.
Tarvitaan kolme lukua.

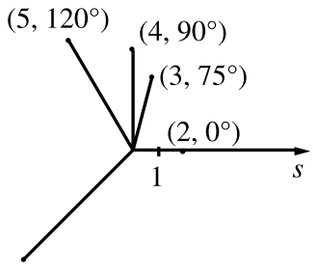
**2.** a) $P = (0, 2)$, $Q = (-3, -2)$
b)




**3.** a) $(-2{,}8;\ 2{,}1)$
$((-3{,}5 \sin 53°,\ 3{,}5 \cos 53°))$
b) $(-2{,}8;\ 2{,}1;\ -1{,}2)$

**4.** $(-19;\ -19;\ 8{,}3)$

**5.**




(6, 225°)

**6.** a) $A(3, 0°)$, $B(3, 90°)$, $C(3, 180°)$,
$D(3, 270°)$, $E(2, 45°)$, $F(\sqrt{2}, 225°)$
b) $G(5, 0)$, $H(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $I(0, 3)$,
$J(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$, $K(0, -4)$

## Etäisyys lukusuoralla

**7.** a) luku itse
b) luvun vastaluku
c) luvun vastaluku
d) luku itse
e) luvun vastaluku

**8.** a) $|-7| = 7$
b) $|\sqrt{10} - 3| = \sqrt{10} - 3$
c) $|-3 + \sqrt{7}| = 3 - \sqrt{7}$

**9.** a) 3 ja $-3$
b) $\sqrt{2}$ ja $-\sqrt{2}$
c) $\sqrt{3} + 1$ ja $-\sqrt{3} - 1$
d) Ei minkään.
(Luku $\sqrt{3} - 2$ on negatiivinen.)

**10.** a) 11,52
b) $7|u|$

**11.** a) $-10$ ja $10$
b) $1$ ja $9$
(Luvut, joiden etäisyys luvusta $5$ on $4$.)
c) $-7$ ja $1$
(Luvut, joiden etäisyys luvusta $-3$ on $4$.)

**12.** a) $|x - 27| = 6$
Ehdon toteuttavat luvut $21$ ja $33$.
b) $|x - (-5)| < 2$ eli $|x + 5| < 2$
Ehdon toteuttavat luvut, jotka ovat välillä $-7 < x < -3$ eli välillä $]-7, -3[$.
c) $|x - 19| \geqslant 6$
Ehdon toteuttavat luvut, joille pätee $x \leqslant 13$ tai $x \geqslant 25$.
(Ratkaisujoukko ei ole väli, joten sitä ei voida kuvailla kaksoisepäyhtälöllä tai välin merkinnällä.)

**13.** a) $-3 < x < 3$ eli välin $]-3, 3[$ luvut
b) $-3 < x < 11$ eli välin $]-3, 11[$ luvut
(Etäisyys luvusta $4$ on pienempi kuin $7$.)
c) $x \leqslant -7$ tai $x \geqslant 3$ (Etäisyys luvusta $-2$ on suurempi tai yhtä suuri kuin $5$.)

**14.** a) $-0{,}75$ b) $2\sqrt{2} - \frac{5}{2}$

**15.** a) $x = -16{,}6$
(Jos $x$ on toinen päätepiste, niin $\frac{x+3}{2} = -6{,}8$.)
b) $x = 3\sqrt{2} - 1$

**16.** a) $|-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$
b) $|3 - \pi| = -3 + \pi \; (= \pi - 3)$
c) $|7 - 2\pi| = 7 - 2\pi$

**17.** a) $3$ ja $-3$ b) $3 + \sqrt{10}$ ja $-3 - \sqrt{10}$
c) $-3 + \sqrt{10}$ ja $3 - \sqrt{10}$

**18.** a) $a \geqslant -4$ b) $a \leqslant -4$

**19.** a) $8$ b) $2\sqrt{5} + 2$ c) $4|u|$

**20.** $|(a + 2b) - (6a - 3b)| = |-5a + 5b| = 5|a - b|$

**21.** a) $-17$ ja $17$
b) $-5$ ja $27$ (Etäisyys luvusta $11$ on $16$.)
c) $5$ ja $-7$ (Etäisyys luvusta $-1$ on $6$.)

**22.** a) $x < -5$ tai $x > 5$
b) Luvut, joille pätee $-5 \leqslant x \leqslant 23$, eli välin $[-5, 23]$ luvut.
(Etäisyys luvusta $9$ on pienempi tai yhtä suuri kuin $14$.)
c) Luvut, joille pätee $x < -10$ tai $x > 4$.
(Etäisyys luvusta $-3$ on suurempi kuin $7$.)

**23.** a) $-1{,}5$ b) $-0{,}9945$ c) $-\frac{8}{21}$

**24.** a) $13$ (Yhtälön toteuttavat luvut, jotka ovat yhtä etäällä luvuista $6$ ja $20$. Ainoa tällainen luku on pisteitä $6$ ja $20$ yhdistävän janan keskipiste.)
b) $-11$

**25.** $1\frac{1}{7}$ $\left(X = 5 - \frac{3}{7} \cdot 9 \text{ tai } X = -4 + \frac{4}{7} \cdot 9\right)$

**26.** a) $-13{,}3$ b) $-1{,}3$

**27.** a) $12$ b) $12$ c) $10$
Postietäisyys on matka, jonka lukusuoran pisteestä toiseen lähetetty postilähetys kulkee, kun se käy origossa sijaitsevassa jakelukeskuksessa. Postietäisyys on yhtä suuri kuin erotuksen itseisarvo silloin, kun luvut ovat erimerkkiset tai kun ainakin toinen luvuista on nolla.

**28.** a) $x$ ja $y$ ovat samanmerkkiset.
b) $x$ ja $y$ ovat samanmerkkiset ja $|x| \geqslant |y|$.
c) $x$ ja $y$ ovat erimerkkiset ja $|x| \geqslant |y|$.
d) $x$ ja $y$ ovat samanmerkkiset.

## Itseisarvoyhtälöt ja -epäyhtälöt

**29.** a) $x = 7$ tai $x = -7$

b) $x = 2$ tai $x = \frac{4}{3}$

c) $x = -3$ tai $x = 25$

**30.** a) $x = -2$ tai $x = \frac{1}{3}$ $(|6x + 5| = 7)$

b) $x = \frac{3}{4}$ tai $x = -\frac{1}{12}$ $(|12x - 4| = 5)$

**31.** a) $-8 \leqslant x \leqslant 8$ (ratkaisujoukko $[-8, 8]$)

b) $-1 < x < \frac{1}{6}$ (ratkaisujoukko $]-1, \frac{1}{6}[$)

c) $2 < x < 5$ (ratkaisujoukko $]2, 5[$)

**32.** a) $x \leqslant -12$ tai $x \geqslant 2$

b) $x < -1$ tai $x > 6$

**33.** a) $x = 1$ tai $x = -3$

b) $x = -1$

**34.** $x = 14$ tai $x = \frac{2}{7}$ $(|4x - 8| = |3x + 6|)$

**35.** 4 ja $-\frac{4}{3}$ (Yhtälö $|x + 4| = 2|x|$.)

**36.** luvuilla 0 ja $\frac{4}{7}$ (Yhtälö $|3x - 2| = |4x - 2|$.)

**37.** $x = -3$ tai $x = -\frac{3}{2}$ tai $x = 1$

**38.** a) $x = 1$ (Yhtälö ei ole määritelty, kun $x = 2$.)

b) $x = 0$ tai $x = 1$ tai $x = 3$
(Yhtälö ei ole määritelty, kun $x = 2$.)

**39.** a) $x = 0$ tai $x = -\frac{6}{7}$

b) $x = -\frac{1}{3}$ tai $x = \frac{2}{3}$ $(|1 - 6x| = 3)$

**40.** $x = -4$ tai $x = -3$ tai $x = 0$ tai $x = 1$

**41.** a) $-\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 2$ b) $x < -\frac{4}{7}$ tai $x > 0$

**42.** a) $x < -\frac{1}{12}$ tai $x > \frac{3}{4}$

b) $2 \leqslant x \leqslant 3$

**43.** a) $x = -2$ tai $x = -1$

b) $x = -2\frac{2}{3}$

**44.** $5\frac{1}{2}$ ja $3\frac{1}{4}$ (Yhtälö $|x - 1| = 3|x - 4|$.)

**45.** $-13$ tai $1\frac{2}{5}$

(Yhtälö $\frac{|x + 1|}{|x - 5|} = \frac{2}{3}$ kerrotaan ristiin.)

**46.** $x = -10$ tai $x = -4$ tai $x = 0$ tai $x = 4$

**47.** luvuilla $-4$, $-2$ ja $3$
(Yhtälö $|x^2 - 9| = |x - 3|$.)

**48.** $x < -3$ tai $-1 < x < 1$ tai $x > 3$

**49.** $-3 < x < 0$ tai $1 < x < 4$
(Epäyhtälö purkautuu muotoon: $x^2 - x > 0$ ja $x^2 - x - 12 < 0$. Ensimmäinen epäyhtälö toteutuu, kun $x < 0$ tai $x > 1$, ja toinen epäyhtälö, kun $-3 < x < 4$.)

## Tason suorakulmainen koordinaatisto

**50.** 10,5

**51.** a) $2\sqrt{5} \approx 4{,}5$ $(\sqrt{20})$ b) 29

c) 48 ($x$-koordinaattien erotuksen itseisarvo.)

**52.** a) $2\sqrt{10} \approx 6{,}3$ $(\sqrt{40})$ b) $\sqrt{x^2 + y^2}$

**53.** a) $(3, -3\frac{1}{2})$ b) $(1, -\frac{1}{2})$

**54.** 5
(Pisteen $A$ etäisyys sivun $BC$ keskipisteestä.)

**55.** a) $A = (4, 0)$ ja $B = (0, 6)$
(Voidaan ratkaista yhtälön avulla tai päätellä yhdenmuotoisista kolmioista.)

b) $A = (2x, 0)$ ja $B = (0, 2y)$

**56.** a) $\sqrt{(x-2)^2+3^2}$
b) $(-2, 0)$ ja $(6, 0)$
(Yhtälö $\sqrt{(x-2)^2+3^2}=5$ korotetaan neliöön, jolloin saadaan toisen asteen yhtälö.)

**57.** $(4, 0)$ (Merkitään pistettä $(x, 0)$, jolloin saadaan yhtälö $\sqrt{(x-3)^2+4^2}=\sqrt{(x-8)^2+1^2}$. Yhtälö korotetaan neliöön.)

**58.** Jos $P=(p, 0)$, niin $D=(0, p)$ ja $F=(6, 6-p)$. Janan $DF$ keskipiste on aina $(3, 3)$.

**59.** 1,6 ha
(Kolmion pinta-ala on 6,5 koordinaatiston ruutua. Yhden ruudun pinta-ala luonnossa on $2500\ \text{m}^2 = 0{,}25$ ha.)

**60.** a) 37 b) $5\sqrt{2} \approx 7{,}1$

**61.** Sivut $AB$ ja $BC$ ovat yhtä pitkät.

**62.** a) $(-4\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ b) $(3\sqrt{2}, 1)$

**63.** a) pituus $2\sqrt{10} \approx 6{,}3$, toinen päätepiste $(4, 2)$
b) pituus $2\sqrt{a^2+b^2}$,
toinen päätepiste $(2a, 2b)$

**64.** pisteessä $(0, 9)$ tai pisteessä $(0, -15)$
(Kysyttyä pistettä merkitään $(0, y)$, jolloin saadaan yhtälö $\sqrt{5^2+(y+3)^2}=13$. Yhtälö korotetaan neliöön.)

**65.** $(4, 4)$ tai $(-2, -2)$

**66.** Jos $P=(p, 0)$, niin $C=(0, p)$ ja $E=(5, 5-p)$. Janan $CE$ keskipiste on aina $(2{,}5;\ 2{,}5)$.

**67.** a) $(-1, 3)$ ja $(-4, -3)$ b) $(8, 0)$ ja $(0, -3)$
c) $(a-3, b+2)$ d) $(a'+3, b'-2)$

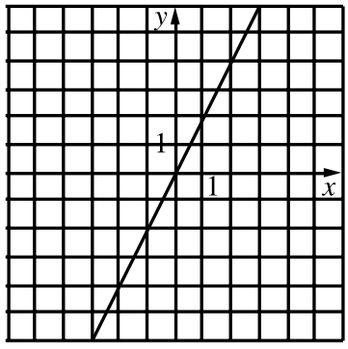
**68.** a) 8 b) 10
c) Taksinkuljettajan etäisyys on yhtä suuri kuin tavallinen etäisyys silloin, kun pisteitä yhdistävä jana on koordinaattiakselin suuntainen, ja aina muulloin tavallista etäisyyttä suurempi.
d) Mikä tahansa reitti, joka kulkee pisteiden $(1, 7)$ ja $(5, 2)$ määräämässä neliössä, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset ja joka muodostuu koordinaattiakselien suuntaisista janoista. Siis taksinkuljettajan reitti pisteestä $(1, 7)$ pisteeseen $(5, 2)$ kulkee pitkin kohtisuorasti leikkaavia katuja.

**69.** a) $(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$
b) 7
(Janan $AB$ pituus lasketaan kosinilauseella.)
c) $11{,}5 \cdot \sin 60° \approx 10{,}0$ (Kolmio ympäröidään suunnikkaalla, jonka pinta-alasta vähennetään kolmen kolmion pinta-ala. Suunnikkaan ja kolmion pinta-alat lasketaan pinta-alan trigonometrisella kaavalla.)

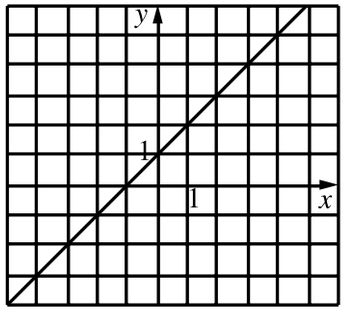
**70.** a) $(\frac{u_1+u_2}{2}, \frac{v_1+v_2}{2})$
b)
$\sqrt{(u_2-u_1)^2+(v_2-v_1)^2+(u_2-u_1)(v_2-v_1)}$
(Kosinilauseella saadaan janan pituuden neliö $(u_2-u_1)^2+(v_2-v_1)^2-2|u_2-u_1||v_2-v_1|\cos\gamma$, missä janan suunnasta riippuen $\gamma=60°$ tai $\gamma=120°$. Lauseke sievenee, kun tutkitaan erotusten merkkejä ja sijoitetaan $\cos 60° = \frac{1}{2}$ ja $\cos 120° = -\frac{1}{2}$.)
c) $\sqrt{u^2+v^2+uv}$

## Pistejoukon yhtälö

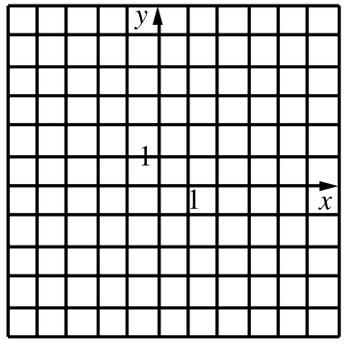
**71.** a) $y = 2x$ eli $2x - y = 0$




b) $y - x = 1$ eli $y = x + 1$

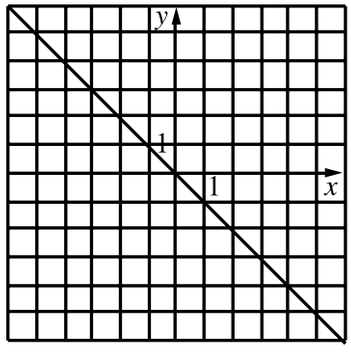



c) $x = 3$



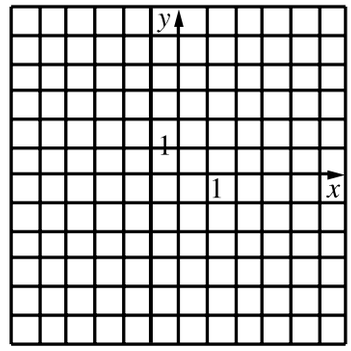

**72.** a) $A$ ei ole, $B$ on ja $C$ on.

b)



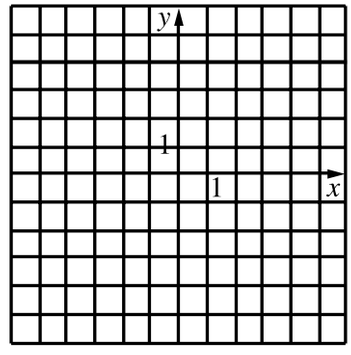

(Yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $y(y + x) = 0$ eli muotoon $y = 0$ tai $y + x = 0$. Yhtälön $y = 0$ toteuttavat pisteet, joiden $y$-koordinaatti on $0$ eli $x$-akselin pisteet. Pistejoukko muodostuu $x$-akselista ja suorasta $y + x = 0$ (eli $y = -x$).)

**73.** a)



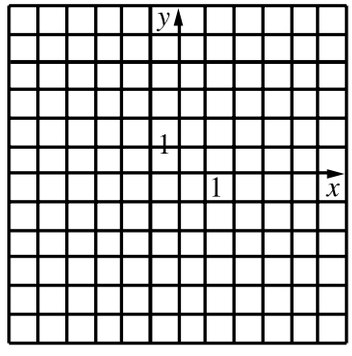

(Yhtälön toinen muoto on $x = -1$, joten yhtälön toteuttavat pisteet, joiden $x$-koordinaatti on $-1$. Pisteet muodostavat $y$-akselin suuntaisen suoran.)

b)




(Yhtälön toinen muoto on $y = 4$, joten yhtälön toteuttavat pisteet, joiden $y$-koordinaatti on $4$. Pisteet muodostavat $x$-akselin suuntaisen suoran.)

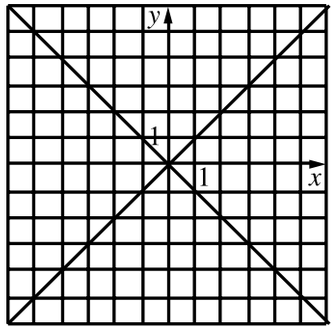
c)




(Tulon nollasäännön perusteella yhtälö $(x + 1)(y - 4) = 0$ toteutuu, kun $x + 1 = 0$ tai $y - 4 = 0$. Siis pistejoukko muodostuu suorista $x = -1$ ja $y = 4$.)

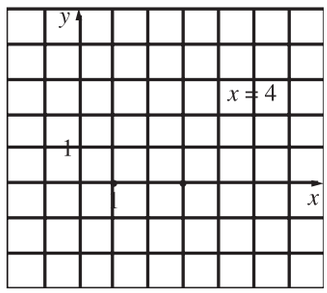
**74.** a) $x^2 = y^2$ eli $y = x$ tai $y = -x$.

b)



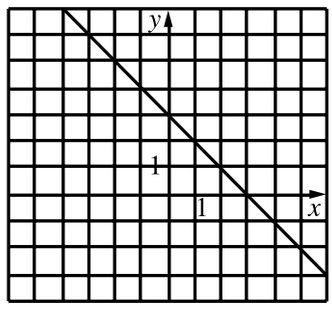

**75.** a) Pisteiden $(x, y)$ ja $(1, 0)$ etäisyyden neliö on $(x-1)^2 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2$.
Pisteiden $(x, y)$ ja $(3, 0)$ etäisyyden neliö on $(x-3)^2 + y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2$.

b) Yhtälö
$(x^2 - 2x + 1 + y^2) - (x^2 - 6x + 9 + y^2) = 8$,
sievennettynä $x = 4$.

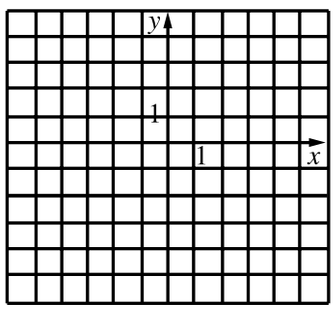



(Yhtälön toteuttavat pisteet, joiden $x$-koordinaatti on 4. Pistejoukko on $y$-akselin suuntainen suora.)

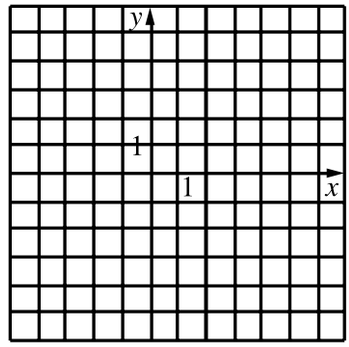
**76.** a) $x + y = 3$



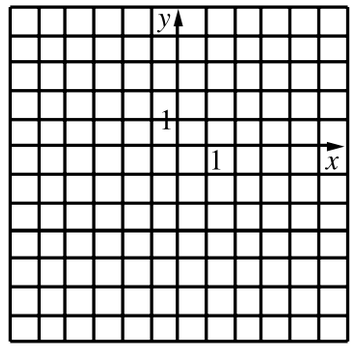

b) $y = -2$ eli $y + 2 = 0$



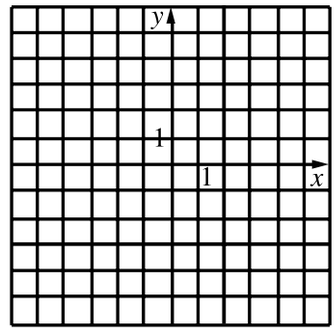

**77.** a)




b)

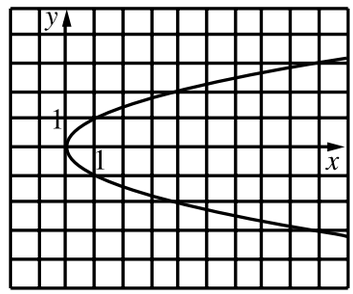



c)



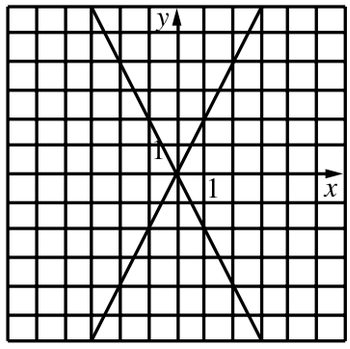

**78.** a) $A$ kuuluu, $B$ ei kuulu ja $C$ kuuluu.

b)



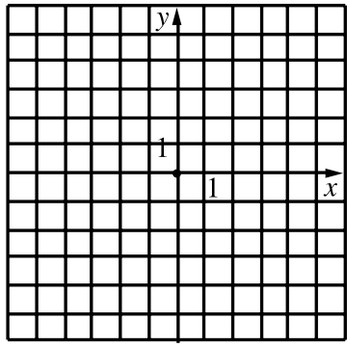

(Pistejoukko on oikealle aukeava paraabeli.)

**79.** a)




Yhtälö toteutuu, kun $y = 2x$ tai $y = -2x$.

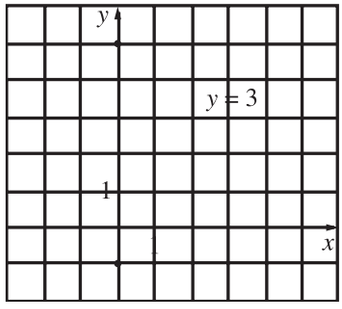
b)




Kahden luvun neliöiden summa on nolla silloin ja vain silloin, kun molemmat luvut ovat nollia. Ainoa piste, jonka koordinaatit toteuttavat yhtälön, on origo.

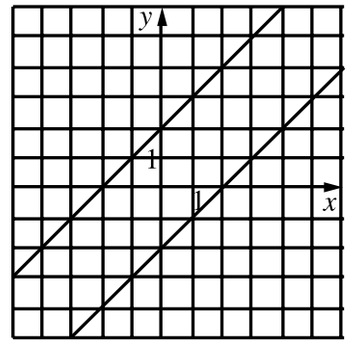
**80.** Kuvio on sama kuin tehtävässä 74.
Yhtälön eri muotoja: $|y| = |x|$, $y^2 = x^2$ sekä $y = x$ tai $y = -x$.

**81.** yhtälö $y = 3$



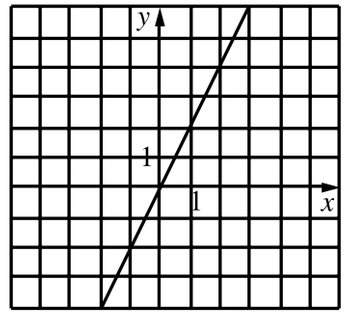

(Etäisyyksien neliöt ovat
$x^2 + (y + 1)^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1$ ja
$x^2 + (y - 5)^2 = x^2 + y^2 - 10y + 25$.)

**82.** a)



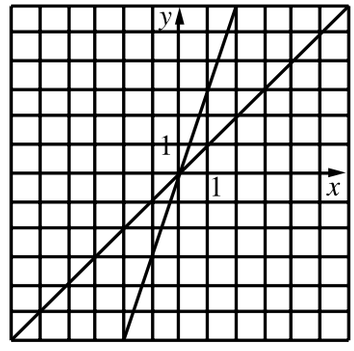

(Yhtälö toteutuu, kun $x - y = 2$ tai $x - y = -2$ eli kun $y = x - 2$ tai $y = x + 2$.)

b)



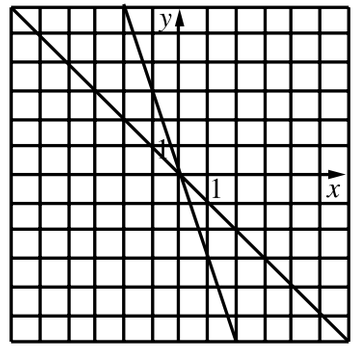

(Yhtälö toteutuu, kun $y - x = x$ tai $y - x = -x$ eli kun $y = 2x$ tai $y = 0$.)

**83.** a)




(Yhtälö toteutuu, kun $2x - y = x$ tai $2x - y = -x$.)

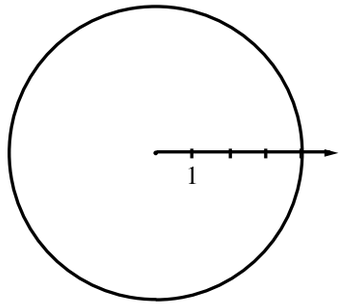
b)




(Yhtälön vasemmalla puolella on binomin neliö.)

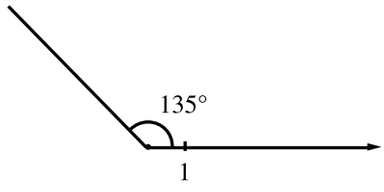
**84.** a) Origosta alkavan janan, jonka pituus on 2 ja joka muodostaa positiivisen $x$-akselin kanssa 45°:n kulman.
b) Puoliympyrän, jonka keskipiste on origo ja säde 3.

**85.** a)



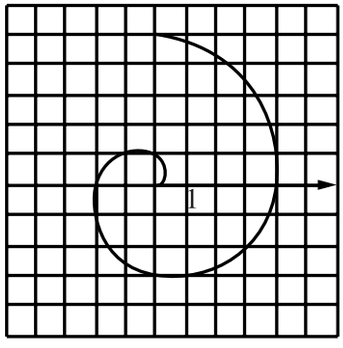

Pistejoukko on ympyrä.

b)




Pistejoukko on puolisuora.

c)




Pistejoukko on spiraali.

## Ympyrän yhtälö

**86.** $A$ ulkopuolella, $B$ ympyrällä ja $C$ sisäpuolella

**87.** a) $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 64$
b) $x^2 + (y + 7)^2 = 256$
c) $x^2 + y^2 = 10$

**88.** a) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 26$
(Ympyrän säde on pisteiden $(-2, 5)$ ja $(3, 4)$ etäisyys $\sqrt{26}$.)
b) On.

**89.** a) Esittää ympyrää, keskipiste on $(2, -7)$ ja säde $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
b) Ei esitä ympyrää.
c) Esittää ympyrää, keskipiste on $(-4, 0)$ ja säde 1.
d) Esittää ympyrää, keskipiste on origo ja säde 3.
e) Esittää ympyrää, keskipiste on origo ja säde $\frac{2}{3}$. (Yhtälö jaetaan ensin luvulla 9.)

**90.** a) $k > 0$ b) $k = 81$ c) $k = 53$

**91.** $\sqrt{29} - 4 \approx 1{,}4$ (Lasketaan pisteen etäisyys ympyrän keskipisteestä ja vähennetään säde.)

**92.** a) $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 9$ (Neliön sisään piirretty ympyrä on ympyrä, joka sivuaa kaikkia neliön sivuja.)
b) $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 18$ (Neliön ympäri piirretty ympyrä on ympyrä, joka kulkee neliön kaikkien kärkien kautta.)

**93.** a) $(2x, 0)$ ja $(0, 2y)$
b) Janan pituus on $\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2}$, joten saadaan yhtälö $\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = 2$.
c) Yhtälö sievenee muotoon $x^2 + y^2 = 1$, joten janojen keskipisteet muodostavat ympyrän, jonka keskipiste on origo ja säde 1.

**94.** a) $y = \sqrt{16 - x^2}$ tai $y = -\sqrt{16 - x^2}$
b) $y = -5 + \sqrt{8 - x^2}$ tai $y = -5 - \sqrt{8 - x^2}$

**95.** $A$ ympyrän sisäpuolella ja $B$ ympyrällä.

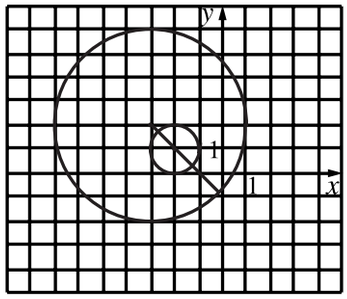
**96.** a) $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 10$
b) $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 5$

**97.** $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 17$

**98.** a) $(3, -5)$ tai $(-3, -5)$
b) $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 9$ tai
$(x+3)^2 + (y+5)^2 = 9$

**99.** a) keskipiste $(12, -1)$, säde 11
b) keskipiste $(-3, 0)$, säde $\sqrt{17}$
c) keskipiste $(-u, v)$, säde $\sqrt{w}$
d) keskipiste origo, säde $\frac{3}{5}$
(Yhtälö jaetaan ensin luvulla 25.)

**100.**




etäisyys $3 - \sqrt{2} \approx 1{,}6$
(Suuremman ympyrän säteestä vähennetään keskipisteiden etäisyys ja pienemmän ympyrän säde.)

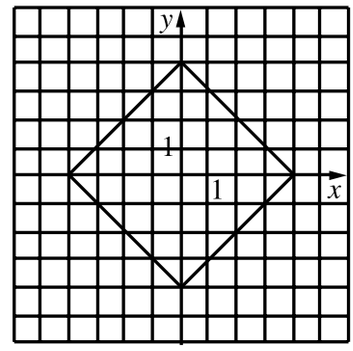
**101.** Janan keskipisteen etäisyys ympyrän keskipisteestä on aina $\sqrt{7}$, joten keskipiste piirtää ympyrän. Ympyrän yhtälö on
$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 7$.

**102.** $x^2 + y^2 = 4$
(Jos janan keskipiste on $(x, y)$, niin janan päätepisteet ovat $(2x, 0)$ ja $(0, 2y)$. Yhtälö saadaan, kun käytetään hyväksi tietoa: janan pituus on 4.)

**103.** a) $y = -1 + \sqrt{10 - (x-3)^2}$ tai
$y = -1 - \sqrt{10 - (x-3)^2}$
b) keskipiste $(0, 3)$, säde $\sqrt{2}$

**104.** $x^2 + (y-5)^2 = 25$
(Jos ympyrän keskipistettä merkitään $(0, b)$, niin ympyrän yhtälö on $x^2 + (y-b)^2 = b^2$.)

**105.** yhtälö $|x| + |y| = 4$




(Kun $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$, niin $x + y = 4$, kun $x \leqslant 0$ ja $y \geqslant 0$, niin $-x + y = 4$ jne.)

## Yhtälö $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

**106.** $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0$

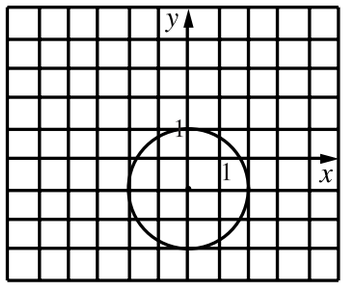
**107.** a) +36 ja +6 b) +25 ja −5
c) $+\frac{25}{4}$ ja $-\frac{5}{2}$ d) $+\frac{9}{4}$ ja $+\frac{3}{2}$

**108.** a) Esittää ympyrää, jonka keskipiste $(4, -5)$ ja säde $\sqrt{53}$.
b) Esittää ympyrää, jonka keskipiste $(0, -1)$ ja säde 1.
c) Ei esitä ympyrää. Esittää pistettä $(3, -6)$.

**109.** a) Ympyrää, jonka keskipiste on $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ ja säde $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
b) Ympyrää, jonka keskipiste $(-1, \frac{3}{2})$ ja säde 2.
(Yhtälö jaetaan aluksi luvulla 4, jolloin se tulee muotoon $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.)

**110.** $\sqrt{26} - 5 \approx 0{,}10$
(Keskipisteiden etäisyydestä vähennetään molemmat säteet.)

**111.** Ympyrän $x^2 + (y+1)^2 = 4$, jonka keskipiste on $(0, -1)$ ja säde 2.

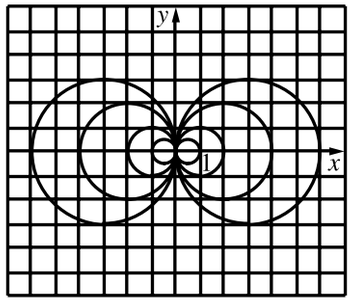



(Sievennetään yhtälö
$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$.)

**112.** $c < 53$
(Neliöksi täydentämällä saadaan yhtälö $(x+7)^2 + (y-2)^2 = -c + 53$. Yhtälö on ympyrän yhtälö, kun $-c + 53 > 0$.)

**113.** a) arvoilla $k \neq 0$, keskipiste $(k, 0)$ ja säde $|k|$.
$(x-k)^2 + y^2 = k^2$)

b)




Kuviossa ovat $k$:n arvoja 3, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-1$, $-2$ ja $-3$ vastaavat parven ympyrät.

**114.** a) $x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2$

b) $y^2 + 9y + \frac{81}{4} = (y + \frac{9}{2})^2$

**115.** a) Ympyrää, jonka keskipiste on $(-10, 9)$ ja säde 12.

b) Pistettä $(4, 0)$.

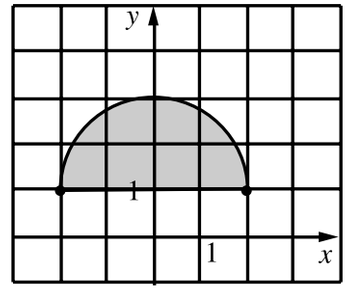
c) Ympyrää, jonka keskipiste on origo ja säde 4.

**116.** a) Ympyrää, jonka keskipiste on $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$ ja säde $\sqrt{\frac{21}{2}}$.

b) Ympyrää, jonka keskipiste on $(-1, -\frac{1}{2})$ ja säde $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

c) Pistettä $(3, -\frac{1}{2})$.

**117.**




**118.** a) $3\sqrt{10} \approx 9{,}5$ b) $4 - \sqrt{10} \approx 0{,}84$

**119.** Ympyrän $(x-9)^2 + (y-4)^2 = 72$, jonka keskipiste on $(9, 4)$ ja säde $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.
(Yhtälö $\frac{\sqrt{(x-5)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + (y+5)^2}} = \frac{2}{3}$ sievennetään kertomalla ristiin ja suorittamalla neliöönkorotus.)

**120.** a) $\sqrt{x^2 + y^2} - 2$

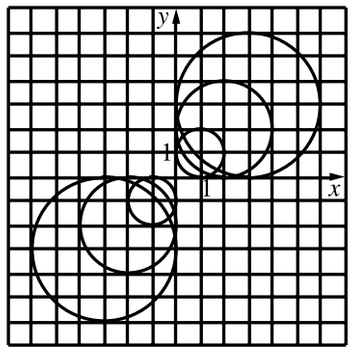
b) $\sqrt{(x-9)^2 + y^2} - 4$

c) Ympyrän $(x+3)^2 + y^2 = 36$, jonka keskipiste on $(-3, 0)$ ja säde 6.

**121.** $a < 0$ tai $a > 4$
(Kun yhtälö täydennetään keskipistemuotoon, oikealle puolelle tulee lauseke $\frac{a^2}{4} - a$.)

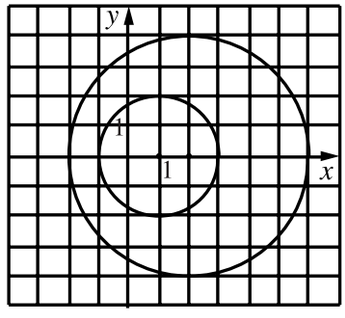
**122.** a) $k \neq 0$, keskipiste $(k, k)$ ja säde $|k|$

b)




Kuviossa ovat $k$:n arvoja 3, 2, 1, $-1$, $-2$ ja $-3$ vastaavat parven ympyrät.

**123.** Ympyrän $(x-1)^2 + y^2 = 4$, jonka keskipiste on $(1, 0)$ ja säde 2.
(Jos kuminauhan keskipiste on $(x, y)$, niin toinen päätepiste on $(2x, 2y)$. Päätepisteen koordinaatit $2x$ ja $2y$ ovat käyrällä $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ ja toteuttavat siis käyrän yhtälön. Sijoittamalla ne yhtälöön saadaan yhtälö keskipisteen koordinaateille.)




Käyrä $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ on ympyrä, jonka keskipiste on $(2, 0)$ ja säde 4.

**124.** a) Ympyrän, jonka keskipiste on $(3, 0)$ ja säde $\sqrt{7}$.
(Pythagoraan lauseella saadaan $PQ = \sqrt{16 - (x-4)^2 - y^2}$. Sievennetään yhtälö $\sqrt{16 - (x-4)^2 - y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$.)
b) Ympyrän, jonka keskipiste on $(3, 0)$ ja säde 3. Myös piste $(0, 0)$ voidaan lukea mukaan, jos tulkitaan, että jänteen puolikkaan pituus on tällöin 0. (Pythagoraan lauseella saadaan $PR = \sqrt{(x-2)^2 + y^2 - 4}$.
Sievennetään yhtälö
$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 - 4} = \sqrt{16 - (x-4)^2 - y^2}$.)

## Suoran kulmakerroin

**125.** $s_1$: 3, $s_2$: $\frac{2}{3}$, $s_3$: 0,
$s_4$: $-\frac{1}{2}$, $s_5$: $-1$, $s_6$: $-\frac{4}{3}$

**126.** a) $-\frac{5}{3}$ b) 0
c) $\frac{1}{4}$ d) ei kulmakerrointa

**127.** Leikkauspiste on a) $(0, 4)$ b) $(0, -3)$ c) $(0, 5)$.

**128.** a) 59,0° ($\tan\alpha = \frac{5}{3}$)
b) $-63{,}4°$ (Voidaan laskea suoraan: $\tan\alpha = -2$, $\alpha \approx -63{,}4°$. Siis laskimesta riippuen näppäillään
tan⁻¹ ( (–) 2 ) tai 2 ± tan⁻¹.)
c) $-53{,}1°$

**129.** a) 1 b) 0 c) $-1$

**130.** 37,9° (Apukolmoiden avulla voidaan laskea: kysytty kulma on $\alpha - \beta$, missä $\tan\alpha = \frac{3}{2}$ ja $\tan\beta = \frac{1}{3}$.)

**131.** a) 8,1° ($\tan\alpha = \frac{1}{7}$)
b) 77,5° ($\tan\alpha = \frac{9}{2}$)

**132.** Janan $AB$ kulmakerroin on $\frac{40}{2} = 20$.
Ensimmäisen kahden tunnin aikana vauhti oli 20 km/h. Janan $BC$ kulmakerroin on 0. Kolmannen tunnin aikana pidettiin tauko.
Janan $CD$ kulmakerroin on $\frac{40}{3} \approx 13$.
Kolmen viimeisen tunnin aikana vauhti oli noin 13 km/h.

**133.** a) Aino 30 km/h, Lauri 20 km/h
b) tuntia myöhemmin
c) 60 km, 3 tuntia

**134.** a) Vähenee 12:lla. Kasvaa 2:lla.
b) Kasvaa 4:llä. Vähenee $\frac{2}{3}$:lla.

**135.** $s_1$: $\frac{1}{4}$, $s_2$: 1, $s_3$: ei kulmakerrointa,
$s_4$: $-\frac{3}{2}$, $s_5$: $-\frac{1}{4}$

**136.** a) $\frac{3}{2}$ b) $-\frac{1}{4}$
c) ei kulmakerrointa
d) $-1$

**137.** a) $(-1, 0)$ b) $(4, 0)$

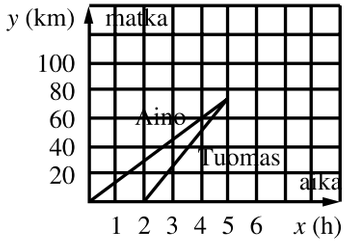
**138.** a) 80,5° b) −9,5°

**139.** a) 0,47 b) −3,73

**140.** 74,9°

**141.** a) 22,62° $(\tan\alpha = \frac{5}{12})$
b) 79,70° $(\tan\alpha = \frac{11}{2})$

**142.** a) 3 tuntia b) 75 km




**143.** Suurin vedenkulutus aikavälillä 6 – 8 (150 $m^3$/h). Pienin vedenkulutus aikavälillä 1–5 (25 $m^3$/h).

**144.** Kulmakerroin 0,2 kuvaa keskilämmön nousua vuorokaudessa. Lämpötila 15.4 on 2,2°. Kevät tulee 5.4.

**145.** a) 1 b) 3 c) 5
Muutosten suhde ei ole vakio, joten kulmakerrointa ei voida määritellä.

## Kulmakertoimen laskeminen

**146.** a) 1 b) $-\frac{1}{4}$

**147.** a) 0, $x$-akselin suuntainen
b) $\frac{1}{3}$, nouseva
c) $-\frac{2}{3}$, laskeva
d) ei kulmakerrointa, $y$-akselin suuntainen

**148.** Eivät ole, sillä suorien kulmakertoimet 42 ja $\frac{5541}{130}$ eivät ole yhtä suuret.

**149.** a) Ei ole. b) On.

**150.** a) 53,1° b) −35,5°

**151.** On. Vastakkaisten sivujen kulmakertoimet ovat yhtä suuret, joten vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.
(Sivujen $OA$ ja $BC$ kulmakerroin on $\frac{7}{16}$,
sivujen $AB$ ja $OC$ kulmakerroin on $-\frac{21}{4}$.
Voidaan myös laskea vastakkaisten sivujen pituudet, sillä nelikulmio on suunnikas, jos ja vain jos sen vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät. Voidaan myös valita tutkittavaksi toinen pari vastakkaisia sivuja ja laskea kahden sivun pituudet ja kulmakertoimet, sillä nelikulmio on suunnikas, jos ja vain jos sen kaksi vastakkaista sivua ovat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset.)

**152.** $7\frac{8}{9}$ (Yhtälö $\frac{7-a}{5-3} = \frac{0-4}{8-(-1)}$.)

**153.** Merkitään kolmion kärkipisteitä $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ja $C(x_3, y_3)$. Sivun $BC$ kulmakerroin on $\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$. Sivun $AB$ keskipiste on $M = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$ ja sivun $AC$ keskipiste $N = (\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2})$. Osoitetaan, että janan $MN$ kulmakerroin on yhtä suuri kuin janan $AB$ kulmakerroin.)

**154.** a) $-\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}$

**155.** a) $-2$ b) $-\frac{2}{3}$

**156.** $-\frac{7}{2}$

**157.** Leikkaavat, sillä suorat eivät ole yhdensuuntaiset.

**158.** a) On. b) Ei ole.

**159.** a) $-63°$ ja $18°$
b) $82°$

**160.** $\frac{159}{4}$

**161.** $A = (0, 9)$ tai $A = (0, 3\frac{4}{9})$

(Merkitään esimerkiksi $A = (0, y)$ ja tutkitaan kahta vaihtoehtoa: $AB$ ja $DC$ ovat yhdensuuntaiset tai $AD$ ja $BC$ ovat yhdensuuntaiset.)

**162.** Merkitään nelikulmion kärkipisteitä $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ja $D(x_4, y_4)$ ja muodostetaan keskipisteiden yhdysjanojen kulmakertoimet.

**163.** a) Osoitetaan, että pisteiden $A(x_1, y_1)$ ja $M(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2})$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on yhtä suuri kuin pisteiden $A$ ja $P$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin.
b) Pisteen $P$ koordinaatit ovat symmetriset kaikkien kärkipisteiden koordinaattien suhteen. Koska yhdestä kärjestä piirretty mediaani kulkee pisteen $P$ kautta, niin kaikista kärjistä piirretyt mediaanit kulkevat pisteen $P$ kautta.
c) $(2, \frac{8}{3})$

## Suoran yhtälö

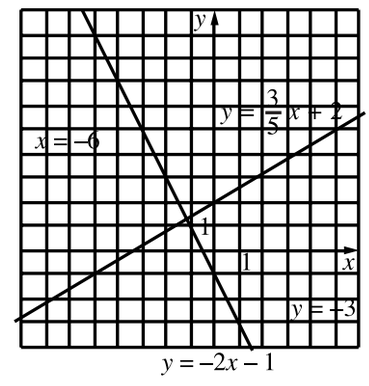
**164.** a) $y = \frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$

(Yhtälö $y - 5 = \frac{1}{3}(x - 2)$ sievennetään ratkaistuun muotoon.)
b) $y = -4x + 7$
(Suoran kulmakerroin on $-4$. Yhtälö $y - 11 = -4(x - (-1))$ tai yhtälö $y - 3 = -4(x - 1)$ sievennetään ratkaistuun muotoon.)

**165.** a) $y = -3x$ b) $y = 2{,}5x$ c) $y = kx$

**166.** a) $y = -5$ b) $x = 6$
c) $y = 3x - 23$ (Suoran kulmakerroin on sama kuin $y = 3x - 9$ kulmakerroin 3.)

**167.**



**168.** a) $y = -\frac{7}{6}x - \frac{11}{6}$

b) On.

c) $y$-akselin pisteessä $(0, -\frac{11}{6})$,

$x$-akselin pisteessä $(-\frac{11}{7}, 0)$

(Leikkauspiste $y$-akselilla saadaan, kun suoran yhtälöön sijoitetaan $x = 0$ ja ratkaistaan $y$. Leikkauspiste $x$-akselilla saadaan, kun suoran yhtälöön sijoitetaan $y = 0$ ja ratkaistaan $x$.)

**169.** $(-6, 1)$

(Kun yhtälö $\frac{1}{6}x + 2 = -\frac{1}{3}x - 1$

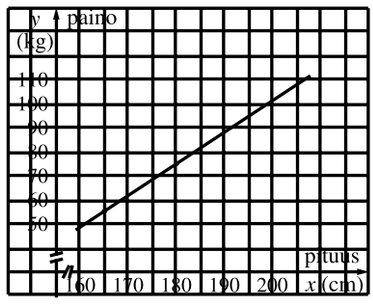
kerrotaan luvulla 6, yhtälö tulee muotoon $x + 12 = -2x - 6$.)

**170.** a) 32 b) 24
(Suorien leikkauspiste on $(-4, 6)$.)

**171.** a) $(-2, \frac{1}{3})$ (Suoran yhtälöön sijoitetaan $x = -2$ ja ratkaistaan $y$.)

b) $(-10\frac{1}{2}, 6)$

**172.** yhtälö $y = \frac{4}{3}x - 165$




(Pisteiden $(165, 55)$ ja $(180, 75)$ kautta kulkevan suoran yhtälö.)
a) 95 kg b) 214 cm

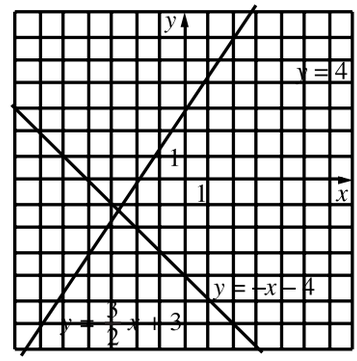
**173.** Ensin suoraan pisteeseen $(4\frac{2}{7}, 0)$ ja sitten suoraan pisteeseen $(6, 2)$. Reitin pituus on $\sqrt{85} \approx 9{,}2$.
(Lyhin reitti pisteestä $(0, 5)$ peilikuvapisteeseen $(6, -2)$ kulkee pitkin pisteiden kautta kulkevaa suoraa. Suoran ja $x$-akselin leikkauspiste voidaan määrittää suoran yhtälön avulla tai yhdenmuotoisista kolmioista.)

**174.** a) $y = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$ b) $y = \frac{7}{11}x$

**175.** a) $y = -3x + 3$ b) $y = 3$
c) $x = -5$

**176.** $y = -x - 1$

**177.**




**178.** a) $k = 16$ b) $b = 11$

**179.** $y = \frac{11}{6}x + \frac{11}{3}$

**180.** a) $(0, 2)$ b) $(-6, 0)$ c) $(-\frac{12}{11}, \frac{18}{11})$

(Yhtälöstä $\frac{1}{3}x + 2 = -\frac{3}{2}x$ kannattaa poistaa nimittäjät kertomalla yhtälö luvulla 6.)

**181.** 116 ha
(Yhden koordinaatiston ruudun pinta-ala luonnossa on 4 ha.)

**182.** a) $C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$

(Pisteiden $(32, 0)$ ja $(212, 100)$ kautta kulkevan suoran yhtälö.)

b) Celsius 233 c) $-13$ °F

**183.** $y = -2x + 6$ tai $y = -2x - 6$

(Suoran yhtälö on muotoa $y = -2x + b$.

Kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot |b| \cdot \left|\frac{b}{2}\right| = \frac{b^2}{4}$.)

**184.** suoran $y = \frac{1}{2}x + 2$

(Käyrällä olevan pisteen $(x, y)$ $y$-koordinaatti on $y$-koordinaattien $2x + 4$ ja $-x$ keskiarvo. Siis $y = \frac{2x + 4 + (-x)}{2}$.)

**185.** a) $y = -2x + 10$ ja $y = -\frac{9}{2}x + 15$

b) $y = \frac{1}{2}x + 5$ ja $y = 18x - 30$

(Ohje: Pisteen $(2, 6)$ kautta kulkevan suoran yhtälö on muotoa $y - 6 = k(x - 2)$. Määritetään suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet. Jos suora on laskeva, niin kolmion pinta-ala on puolet leikkauspisteiden koordinaattien tulosta. Jos suora on nouseva, niin pinta-ala on puolet leikkauspisteiden koordinaattien tulon vastaluvusta.)

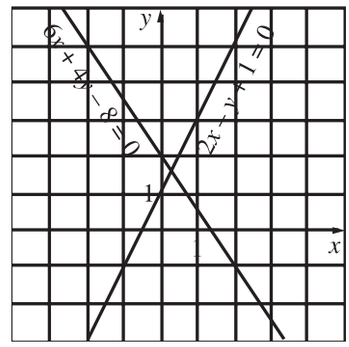
## Yhtälö $Ax + By + C = 0$

**186.** a) $y = x - 3$, kulmakerroin 1, leikkauspiste $(0, -3)$

b) $y = -\frac{4}{3}x + 4$, kulmakerroin $-\frac{4}{3}$, leikkauspiste $(0, 4)$

c) $y = -\frac{8}{5}$, kulmakerroin 0, leikkauspiste $(0, -\frac{8}{5})$

**187.**




(Ratkaistut muodot ovat $y = 2x + 1$ ja $y = -\frac{3}{2}x + 2$.)

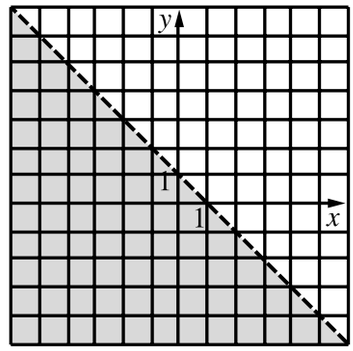
**188.** a) $3x + y - 7 = 0$

b) $5x - 12y - 64 = 0$

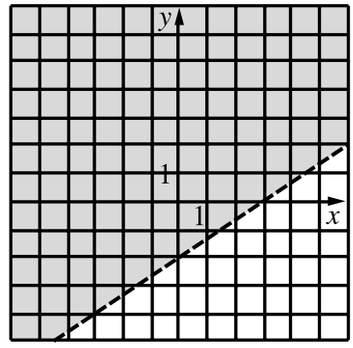
**189.** $5x + 6y - 15 = 0$ $(y = -\frac{5}{6}x + \frac{5}{2})$

**190.** 27

**191.** a) Pisteet, jotka ovat suoran $y = -x + 1$ alapuolella.

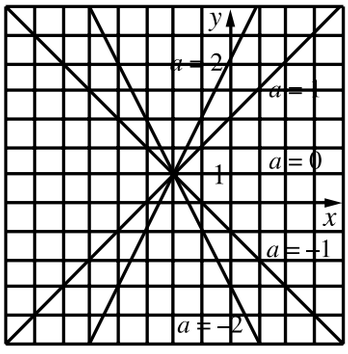



b) Pisteet, jotka ovat suoran $y = \frac{2}{3}x - 2$ yläpuolella.



**192.** $a = -1$ (Suorien kulmakertoimien $-a$ ja $\frac{a+3}{2}$ tulee olla yhtä suuret.)

**193.** a)



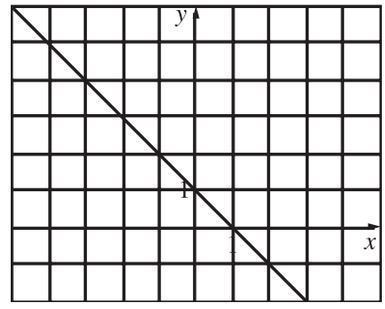

Kuviossa ovat $a$:n arvoja 0, 1, 2, $-1$ ja $-2$ vastaavat suorat. Jokainen piirretty suora kulkee pisteen $(-2, 1)$ kautta.

b) Osoitetaan, että pisteen $(-2, 1)$ koordinaatit toteuttavat suoraparven yhtälön $ax + 2a - y + 1 = 0$. Toinen tapa on huomata, että yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $y - 1 = a(x + 2)$. Siis yhtälö esittää suoraa, jonka kulmakerroin on $a$ ja joka kulkee pisteen $(-2, 1)$ kautta.

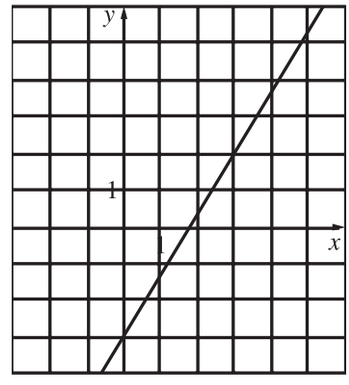
**194.** alapuolella
(Piste toteuttaa epäyhtälön $9x - 4y + 2 > 0$.)

**195.** suoran $y = 2x + 5$
(Etäisyyksien neliöt ovat $(x-2)^2 + (y+1)^2$ ja $(x+4)^2 + (y-2)^2$.)

**196.** a) $y = -x + 1$




b) $y = \frac{5}{3}x - 3$




**197.** a) $x - 6y - 13 = 0$
b) $5x + 3y + 20 = 0$

**198.** a) $7x - 9y - 16 = 0$

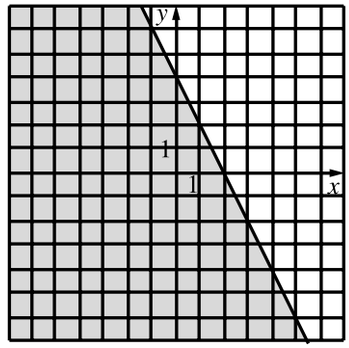
b) $x$-akselin pisteessä $(\frac{16}{7}, 0)$ ja

$y$-akselin pisteessä $(0, -\frac{16}{9})$

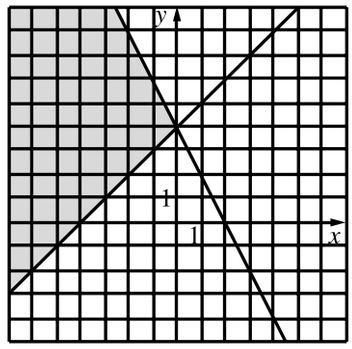
**199.** a) 11,3° b) −74,5°

**200.** Yhtälö $y - 1 = -3(x + 1)$ kuvaa eri suoraa kuin muut. (Verrataan yhtälöiden ratkaistuja muotoja.)

**201.** a) Pisteet, jotka ovat suoralla $y = -2x + 4$ tai sen alapuolella.

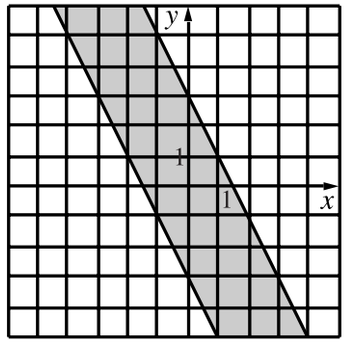



b) Epäyhtälöt toteutuvat kuvion tummennetulla alueella ja sen reunoilla.




**202.** 117

**203.** Pisteet, jotka ovat suorilla $y = -2x + 3$ ja $y = -2x - 3$ tai suorien välissä.

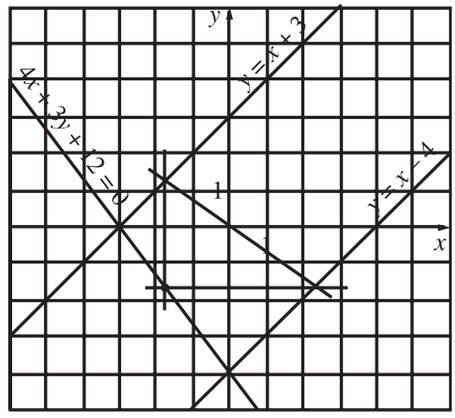



(Epäyhtälö toteutuu, kun $-3 \leqslant 2x + y \leqslant 3$ eli kun $2x + y \geqslant -3$ ja $2x + y \leqslant 3$.)

**204.** Yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $ax + (1 - a)y + 3a = 0$. Osoitetaan, että ainakin toinen kertoimista $a$ ja $1 - a$ on aina eri suuri kuin nolla. Suoraparven suorat $y = 0$ $(a = 0)$ ja $x + 3 = 0$ $(a = 1)$ leikkaavat pisteessä $(-3, 0)$. Sijoittamalla pisteen $(-3, 0)$ koordinaatit suoraparven yhtälöön nähdään, että kaikki parven suorat kulkevat pisteen $(-3, 0)$ kautta.

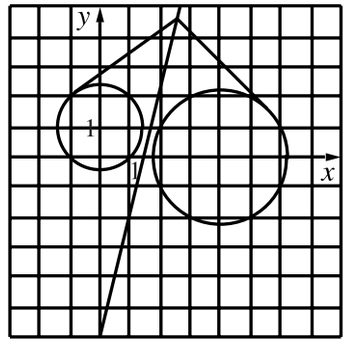
**205.** suoran $2x + y - 3 = 0$
(Ohje: Jos kuminauhan keskipiste on $(x, y)$, niin toinen päätepiste on $(2x, 2y)$. Päätepisteen koordinaatit $2x$ ja $2y$ toteuttavat suoran yhtälön.)

**206.** suoran $4x + 3y + 12 = 0$




(Pisteet $Q = (y + 4, y)$ ja $R = (x, x + 3)$, missä $y \neq -4$ ja $x \neq 0$, ovat samalla origon kautta kulkevalla suoralla, jos ja vain jos $\dfrac{y}{y+4} = \dfrac{x+3}{x}$. Kun $y = -4$ tai $x = 0$, ehdon täyttää piste $(0, -4)$. )

**207.** suoran $4x - y - 6 = 0$ $(y = 4x - 6)$




(Pythagoraan lauseella saadaan
$PQ = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 - 2}$ ja
$PR = \sqrt{(x-4)^2 + y^2 - 5}$ .)

## Lineaarinen yhtälöryhmä

**208.** a) $x = -2,\ y = 3$
b) $s = -17,\ t = 21$

**209.** $(-\frac{51}{19}, \frac{5}{19})$

**210.** a) $(\frac{10}{7}, \frac{1}{7})$ b) Suorat ovat samoja.

**211.** a) ei ratkaisuja b) $x = 0,\ y = 0$

**212.** $x = 6,\ y = 3$
(Poistetaan sulkeet, samanmuotoiset termit yhdistetään ja järjestetään allekkain.)

**213.** $x = -4,\ y = 12$
(Kun ensimmäinen yhtälö kerrotaan luvulla 12 ja jälkimmäinen yhtälö luvulla 4, saadaan yhtälöpari $3x + 2y = 12$ ja $4x + y = -4$ .)

**214.** 115 lastenlippua ja 306 aikuisten lippua

**215.** 35 neljän pullan pussia ja 26 kymmenen pullan pussia

**216.** $x = 3,\ y = -1,\ z = 2$

**217.** $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$, keskipiste $(-2, 3)$, säde $\sqrt{10}$

**218.** a) $(-4, 1)$ ja $(11, -4)$
b) suoran $x + 3y + 1 = 0$
(Muuttuja $t$ voidaan eliminoida yhteenlaskumenetelmällä kertomalla jälkimmäinen yhtälö luvulla 3 ja laskemalla sen jälkeen yhtälöt yhteen. Muuttuja $t$ voidaan eliminoida myös sijoitusmenetelmällä ratkaisemalla $t$ (helpommin) jälkimmäisestä yhtälöstä $(t = y + 1)$ ja sijoittamalla lauseke ensimmäiseen yhtälöön.)

**219.** Annilla 17, Pekalla 13 ja Venlalla 8

**220.** 400 g, 300 g ja 300 g

**221.** a) $a = \frac{5}{7},\ b = \frac{1}{7}$ b) $x = -\frac{21}{19},\ y = -\frac{62}{19}$

**222.** Kahden ensimmäisen suoran leikkauspisteen $(1, -3)$ koordinaatit toteuttavat myös kolmannen yhtälön.

**223.** $x = 13\frac{1}{2},\ y = 14$

**224.** a) $x = \frac{7}{5},\ y = \frac{2}{5}$

b) Yhtälöparin toteuttavat suoran $y = \frac{1}{2}x + 3$ pisteiden koordinaatit.

**225.** $x = 9,\ y = -7$

**226.** Tweedledum 120 naulaa ja
Tweedledee 121 naulaa

**227.** taajama-ajo 11,3 l/100 km,
maantieajo 7,7 l/100 km

**228.** $f(x) = 3x - 8$
(a-kohdassa ratkaistaan yhtälöpari $3a + b = 1$ ja $7a + b = 13$. b-kohdassa määritetään pisteiden $(3, 1)$ ja $(7, 13)$ kautta kulkevan suoran yhtälö.)

**229.** a) 33 % b) 28 %

**230.** $x = 3,\ y = -1,\ z = -2$

**231.** $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$, keskipiste $(1, 0)$ ja säde $\sqrt{5}$

**232.** suoran $3x + 2y - 4 = 0$
(Yhtälöparista $x = 4 + 2t$ ja $y = -4 - 3t$ eliminoidaan $t$.)

**233.** $(0, 2)$, $(2, 4)$ ja $(6, -4)$

**234.** seitsemässä

**235.** 43 % seosta $A$, 46 % seosta $B$ ja
11 % seosta $C$

## Ympyrän leikkauspisteitä

**236.** (4, 8) ja (−4, −8)

**237.** (2, 0) ja (−1, 1)
(Yhtälöön $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ sijoitetaan $x = 2 - 3y$.)

**238.** a) $(\sqrt{7}, 0)$ ja $(-\sqrt{7}, 0)$ (Sijoitetaan $y = 0$.)
b) (0, 1) ja (0, −7) (Sijoitetaan $x = 0$.)

**239.** (1, 3) ja (−1, 1)

**240.** (5, 0) ja (3, −4)
(Ympyröiden yhtälöt ovat $x^2 + y^2 = 25$ ja $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 35 = 0$.)

**241.** $y = 3x - 10$ tai $y = 3x + 10$

**242.** $\left(\frac{5}{\sqrt{10}}, \frac{15}{\sqrt{10}}\right)$ eli $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, 3\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$
(Ratkaistaan pisteet, joissa origon ja pisteen (2, 6) kautta kulkeva suora leikkaa ympyrän.)

**243.** $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ tai
$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 4$
(Ympyrän yhtälö on muotoa
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 4$, missä $(a, b)$ on ympyrän keskipiste. Sijoittamalla pisteiden (2, 5) ja (4, 3) koordinaatit saadaan yhtälöpari.)

**244.** (2,3; 2,0) ja (2,9; −0,7)

**245.** (0, −3) ja $\left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$
(Yhtälöpari $2x - y - 3 = 0$ ja $x^2 + y^2 = 9$.)

**246.** (0, −1) ja (2, 1)

**247.** 170 km

**248.** −2 ja 3

**249.** a) $x = 2,\ y = 6$ tai $x = 6,\ y = 2$
b) $x = 3\frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2}$ tai $x = -4,\ y = -2$
(Kumpikin yhtälöpari ratkaistaan sijoitusmenetelmällä.)

**250.** (0, 3) ja (−2, −1)

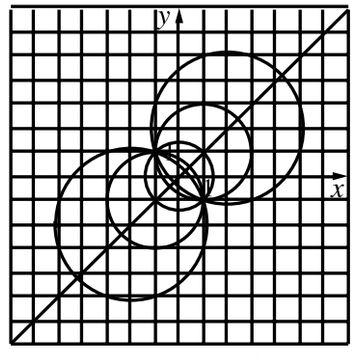
**251.** (3, 2) ja (3, −2)

**252.** $(1 - \sqrt{2},\ 2 - 2\sqrt{2})$

**253.** $y = \frac{4}{3}x + 5$ ja $y = -\frac{4}{3}x + 5$
(Ohje: Pisteen (0, 5) kautta kulkevan suoran yhtälö on muotoa $y = kx + 5$.)

**254.** $y = 2x + 5$ ja $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
(Pisteen (−1, 3) kautta kulkevat suorat ovat muotoa $y - 3 = k(x + 1)$.)

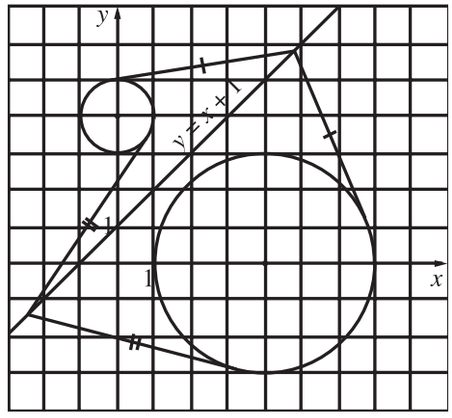
**255.** a) kaikilla $a$:n arvoilla, keskipiste $(a, a)$ ja säde $\sqrt{2a^2 + 2}$.
b) Parven jokainen ympyrä kulkee pisteiden (1, −1) ja (−1, 1) kautta.
(Määritetään kahden parveen kuuluvan ympyrän leikkauspisteet ja osoitetaan, että ne ovat kaikilla parven ympyröillä.)
c)




Parvi muodostuu pisteiden (1, −1) ja (−1, 1) kautta kulkevista ympyröistä, joiden keskipiste on suoralla $y = x$.

**256.** $x + 2y + 3 = 0$
(Yhtälöt vähennetään toisistaan.)
Koska leikkauspisteet toteuttavat molempien ympyröiden yhtälöt, ne toteuttavat myös yhtälön, joka saadaan, kun ympyröiden yhtälöt vähennetään toisistaan. Koska kahden pisteen kautta kulkee vain yksi suora, kyseessä on leikkauspisteiden kautta kulkeva suora.

**257.** Suoran pisteistä ympyröille piirretyt tangenttijanat ovat yhtä pitkät.




$(x^2 + y^2 + Ax + By + C$
$= (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$, missä $(a, b)$ on ympyrän keskipiste ja $r$ ympyrän säde. Lauseke $(x - a)^2 + (y - b)^2$ on pisteiden $(x, y)$ ja $(a, b)$ etäisyyden neliö. Pythagoraan lauseella saadaan tulkinta: Lauseke ilmaisee pisteestä $(x, y)$ ympyrälle piirretyn tangenttijanan pituuden neliön.)

## Suorien kohtisuoruus

**258.** a) Eivät ole. b) Ovat.

**259.** a) $-\frac{1}{4}$ b) $\frac{6}{5}$

**260.** Kulmakertoimien $-\frac{2}{3}$ ja $\frac{3}{2}$ tulo on $-1$.

**261.** a) $y = -3x - 1$ $(3x + y + 1 = 0)$
b) $y = 2$

**262.** (5,1; 1,7)

**263.** a) $y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$ b) $(0, \frac{7}{4})$

**264.** $y = \frac{2}{3}x - \frac{13}{3}$ $(2x - 3y - 13 = 0)$

**265.** a) (0, 3) (Piste, jossa pisteen $(2, -1)$ kautta kulkeva suoran $x - 2y + 6 = 0$ normaali leikkaa suoran.)
b) $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
c) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 20$

**266.** 1,8 km ($\sqrt{13} \approx 3{,}6$ koordinaatiston yksikköä)
(Määritetään suoran $2x - 3y + 3 = 0$ piste, joka on lähinnä pistettä $(5, 0)$.)

**267.** a) $(\frac{8}{3}, \frac{16}{3})$
(Riittää, kun määritetään kahden sivun keskinormaalien leikkauspiste, esimerkiksi sivun $AB$ keskinormaalin $y = 2x$ ja sivun $BC$ keskinormaalin $y = -x + 8$ leikkauspiste.)
b) $\frac{\sqrt{170}}{3}$
c) $(x - \frac{8}{3})^2 + (y - \frac{16}{3})^2 = \frac{170}{9}$

**268.** a) $k = 1$ tai $k = 2$ (Suorien kulmakertoimien $-\frac{2}{k}$ ja $k - 3$ tulee olla yhtä suuret. Lisäksi on todettava, että suorat eivät ole yhdensuuntaiset, kun $k = 0$.)
b) $k = 6$ (Suorien kulmakertoimien tulon tulee olla $-1$. Lisäksi on todettava, että suorat eivät ole kohtisuorassa, kun $k = 0$.)

**269.** a) On. b) Ei ole. c) On.

**270.** Sivujen $AB$ ja $BC$ kulmakertoimien $-\frac{1}{2}$ ja 2 tulo on $-1$, joten kolmion kulma $B$ on suorakulma.
(Toinen tapa on laskea kolmion sivujen pituudet: $|AB| = \sqrt{4500}$, $|BC| = \sqrt{2205}$ ja $|AC| = \sqrt{6705}$. Koska $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$, kolmio $ABC$ on Pythagoraan lauseen käänteislauseen nojalla suorakulmainen kolmio.)

**271.** suora $s_1$: $3x + 5y + 5 = 0$ $(y = -\frac{3}{5}x - 1)$

suora $s_2$: $5x - 3y + 31 = 0$ $(y = \frac{5}{3}x + \frac{31}{3})$

**272.** (2,1; 4,3)

**273.** Pisteeseen $(3, 4)$ tai $(-4, -3)$, ehkä mieluummin lähempään pisteeseen $(3, 4)$.
(Pisteitä $(2, 9)$ ja $(8, 3)$ yhdistävän janan keskinormaalin ja ympyrän leikkauspisteet.)

**274.** $y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$ $(4x - 3y - 8 = 0)$

**275.** Tangenttien kulmakertoimien $-3$ ja $\frac{1}{3}$ tulo on $-1$.

**276.** pisteeseen $(4, 6)$
(Pisteiden muodostaman kolmion kahden sivun keskinormaalien leikkauspiste. Voidaan myös muodostaa pisteiden kautta kulkevan ympyrän yhtälö yhtälöryhmällä kuten tehtävässä 217. Kolmas tapa on merkitä kysyttyä pistettä $(a, b)$ ja merkitä etäisyyksien neliöt $(2 - a)^2 + (0 - b)^2$ jne. yhtä suuriksi ja ratkaista kahden yhtälön ryhmästä $a$ ja $b$.)

**277.** $(-5, 3)$

**278.** $(-2, 1)$ ja $(1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$
(Suoralla olevat pisteet ovat muotoa $X(x, x + 3)$. Pisteestä $X$ origoon ja pisteeseen $(0, 5)$ piirrettyjen janojen kulmakertoimien tulon tulee olla $-1$. Toinen tapa ratkaista ongelma on määrittää pisteet, joissa suora $y = x + 3$ leikkaa ympyrän, jonka halkaisija on origoa ja pistettä $(0, 5)$ yhdistävä jana. Ratkaisu perustuu kurssissa Geometria opittuun tietoon: puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suorakulma.)

**279.** ympyrän $(x - 1)^2 + y^2 = 9$ lukuun ottamatta pisteitä $A$ ja $B$
(Yhtälön voi muodostaa kulmakertoimien kohtisuoruusehdon avulla: Piste $(x, y)$, jolle $x \neq -2$ ja $x \neq 4$, on käyrällä, jos ja vain jos kulmakertoimien $\frac{y}{x + 2}$ ja $\frac{y}{x - 4}$ tulo on $-1$.
Suorilla $x = -2$ ja $x = 4$ vaaditun ehdon täyttäviä pisteitä ei ole. Yhtälön voi muodostaa myös geometrisesti: Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora, joten pisteet, joista jana näkyy suorassa kulmassa, ovat jana halkaisijana piirretyllä ympyrällä.)

**280.** Sijoitetaan $r$-säteinen ympyrä koordinaatistoon niin, että keskipiste on origossa, jolloin ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 = r^2$.
Kehän pisteestä $(x, y)$, missä $x \neq 0$, pisteisiin $(0, -r)$ ja $(0, r)$ piirrettyjen janojen kulmakertoimien tulo on

$$\frac{y + r}{x} \cdot \frac{y - r}{x} = \frac{y^2 - r^2}{x^2} = \frac{-x^2}{x^2} = -1.$$

Siis janat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

**281.** a) Yleisyyttä menettämättä kolmion voi sijoittaa koordinaatistoon niin, että yksi kärki on origossa ja yksi sivu koordinaattiakselilla.
Jos kolmion kärjet ovat $A(0, 0)$, $B(0, b)$ ja $C(c, d)$, niin kärjestä $A$ piirretty korkeusjana on suoralla $y = \frac{c}{b - d}x$, kärjestä $B$ piirretty korkeusjana suoralla $y = -\frac{c}{d}x + b$ ja kärjestä $C$ piirretty korkeusjana suoralla $y = d$. Osoitetaan esimerkiksi, että kahden viimeisen suoran leikkauspiste $(\frac{bd - d^2}{c}, d)$ on ensimmäisellä suoralla.
b) $(-2, 1)$
(Riittää, että määritetään kahden korkeusjanan leikkauspiste.)

## Pisteen etäisyys suorasta

**282.** a) $\frac{2}{\sqrt{41}} \approx 0{,}31$ $\left(\frac{|4 \cdot 0 - 5 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{4^2 + (-5)^2}}\right)$

b) $\frac{21}{\sqrt{41}} \approx 3{,}3$ $\left(\frac{|4 \cdot (-1) - 5 \cdot 3 - 2|}{\sqrt{4^2 + (-5)^2}}\right)$

**283.** a) $\frac{2}{\sqrt{37}} \approx 0{,}33$ (Suoran yhtälön yleinen muoto on $x - 6y - 4 = 0$.)

b) 6
(Voidaan laskea ilman kaavaa, sillä pisteen etäisyys $x$-akselin suuntaisesta suorasta on $y$-koordinaattien erotuksen itseisarvo $|-1 - 5|$. Jos pisteen $(-4, -1)$ etäisyys suorasta $y - 5 = 0$ lasketaan etäisyyskaavalla, saadaan $\frac{|-1 - 5|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 6$.)

c) 4

**284.** $\frac{3}{5}\sqrt{10} \approx 1{,}9$

(Suoran etäisyys ympyrän keskipisteestä $(-3, 4)$ on $\frac{16}{\sqrt{10}}$. Etäisyydestä vähennetään ympyrän säde $\sqrt{10}$. Lauseke saadaan sievennettyyn muotoon, kun etäisyys $\frac{16}{\sqrt{10}}$ lavennetaan nimittäjällä $\sqrt{10}$.)

**285.** $3x - y + 2 = 0$ ja $x + 3y - 6 = 0$

$\left(\frac{|3x + 4y - 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = |y - 2|\right)$

**286.** Osoitetaan, että suoran $y = \frac{2}{3}x - 1$ eli suoran $2x - 3y - 3 = 0$ etäisyys ympyrän keskipisteestä $(1, 4)$ on säteen $\sqrt{13}$ suuruinen.
(Toinen tapa on, että ratkaistaan suoran ja ympyrän leikkauspisteet, jolloin nähdään, että yhteisiä pisteitä on yksi.)

**287.** $x^2 + y^2 = \frac{5}{4}$

(Ympyrä, jonka säde on yhtä suuri kuin origon etäisyys suorasta.)

**288.** $x = 5$ ja $y = \frac{8}{15}x - \frac{17}{3}$

(Pisteen $(5, -3)$ kautta kulkevat suorat (lukuun ottamatta $y$-akselin suuntaista suoraa), ovat muotoa $y + 3 = k(x - 5)$ eli $kx - y - 5k - 3 = 0$. Suoran etäisyyden keskipisteestä $(0, 0)$ tulee olla 5. Yhtälöstä saadaan vain yksi $k$:n arvo. Koska ulkopuolisesta pisteestä voidaan aina piirtää ympyrälle kaksi tangenttia, toisen tangentin täytyy olla $y$-akselin suuntainen, minkä kuvio vahvistaakin.)

**289.** $y = -\frac{3}{4}x$ ja $x = 0$

(Muotoa $y = kx$ eli $kx - y = 0$ olevan suoran etäisyyden keskipisteestä tulee olla säteen suuruinen.)

**290.** $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$ ja $y = -\frac{3}{4}x - \frac{29}{4}$

(Ratkaistaan, millä $b$:n arvoilla suoran $y = -\frac{3}{4}x + b$ eli suoran $3x + 4y - 4b = 0$ etäisyys pisteestä $(-3, 0)$ on 4.)

**291.** $\sqrt{13} \approx 3{,}6$

(Lasketaan toisen suoran yhden pisteen etäisyys toisesta suorasta, esimerkiksi pisteen $(1, 1)$ etäisyys suorasta $2x + 3y + 8 = 0$ tai pisteen $(-4, 0)$ etäisyys suorasta $2x + 3y - 5 = 0$.)

**292.** $7x - 24y + 66 = 0$ ja $7x - 24y - 34 = 0$

(Pisteen $(x, y)$ etäisyys suorasta on $\frac{|7x - 24y + 16|}{\sqrt{7^2 + (-24)^2}}$. Yhtälö $\frac{|7x - 24y + 16|}{\sqrt{7^2 + (-24)^2}} = 2$ sievennetään kahden suoran yhtälöksi.)

**293.** a) 6,3 km b) 6,5 km

**294.** 42

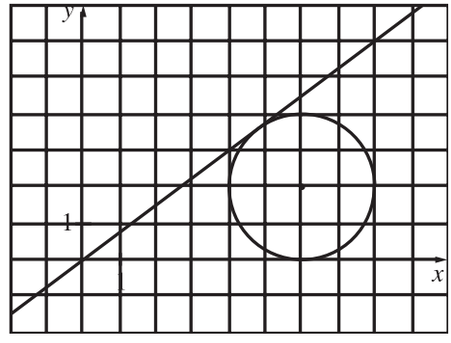
**295.** a) Ympyrän keskipisteen $(-2, 3)$ etäisyys suorasta on $\frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$. Etäisyys on suurempi kuin ympyrän säde $\sqrt{17}$.
(Voidaan myös muodostaa ympyrän ja suorien yhtälöistä yhtälöpari, eliminoida $y$ ja havaita että muuttujalle $x$ saadun toisen asteen yhtälön diskriminantti on negatiivinen.)
b) Osoitetaan, että suoran etäisyys keskipisteestä on säteen suuruinen.
(Voidaan myös muodostaa yhtälöistä yhtälöpari, eliminoida toinen muuttuja ja havaita, että toiselle muuttujalle saadun toisen asteen yhtälön diskriminantti on nolla.)

**296.** $x - 3y = 0$ ja $3x + y = 0$

**297.** $y = 3$ ja $12x - 5y + 3 = 0$

**298.** $y = 3x + 2\sqrt{10}$ tai $y = 3x - 2\sqrt{10}$
(Suoran $y = 3x + b$ etäisyyden origosta tulee olla 2.)

**299.** a) $(6, 2)$ (Riittää, kun lasketaan kolmion kahden kulman puolittajien leikkauspiste.)
b) $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 4$




**300.** $(0, 0)$ tai $(4, 0)$

**301.** $y = -13x + 29$ ja $y = -\frac{3}{11}x + \frac{39}{11}$
(Suorat ovat muotoa $y - 3 = k(x - 2)$ eli $kx - y + 3 - 2k = 0$.)

**302.** Suoralla $x - 2y + 6 = 0$ tai suoralla $3x + 14y - 42 = 0$.

**303.** $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 36$, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$, $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$
(Ympyröiden keskipisteet voidaan määrittää kulmien puolittajien leikkauspisteinä.
Voidaan myös käyttää hyväksi havaintoa:
Jos ympyrä sivuaa molempia koordinaattiakseleita, sen keskipiste on muotoa $(a, a)$ tai $(a, -a)$ ja säde $|a|$.)

**304.** a) Pisteen $(x_0, y_0)$ etäisyys suorasta $By + C = 0$ eli suorasta $y = -\frac{C}{B}$ on $y$-koordinaattien erotuksen itseisarvo
$$\left| y_0 + \frac{C}{B} \right| = \left| \frac{By_0 + C}{B} \right|.$$
Etäisyyskaavalla saadaan
$$\left| \frac{By_0 + C}{\sqrt{B^2}} \right| = \left| \frac{By_0 + C}{|B|} \right| = \left| \frac{By_0 + C}{B} \right|$$
eli siis oikea tulos.

b) Pisteen $(x_0, y_0)$ etäisyys suorasta $Ax + C = 0$ eli suorasta $x = -\frac{C}{A}$ on $x$-koordinaattien erotuksen itseisarvo
$$\left| y_0 + \frac{C}{A} \right| = \left| \frac{Ax_0 + C}{A} \right|.$$
Osoitetaan, että kaavalla saadaan sama tulos.

**305.** a) Jos kolmion kärkipisteet ovat $(0, 0)$, $(2a, 0)$ ja $(a, b)$, missä $a > 0$ ja $b > 0$, niin etäisyyksien summa on aina $\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
b) Olkoon kolmion kylkien pituus $a$ ja kolmion pinta-ala $A$. Olkoot $h_1$ ja $h_2$ kannan pisteen etäisyydet kyljistä. Tällöin
$$A = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2).$$
Siis aina on $h_1 + h_2 = \frac{2A}{a}$.)

## Paraabeli

**306.** paraabelin $y = \frac{1}{4}x^2$ (Sievennetään yhtälö $\sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = |y+1|$.)

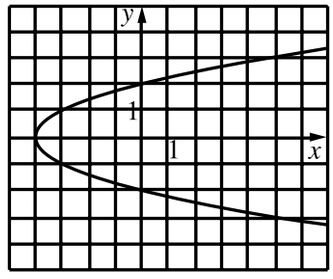
**307.** Aukeaa oikealle.
a) (5, 0) (Sijoitetaan $y = 0$.)
b) (0, 1) ja (0, 5) (Sijoitetaan $x = 0$.)

**308.** $(-1, -2)$ ja (2, 1)

**309.** a) paraabelia
(Alaspäin aukeava paraabeli $y = -x^2 + 3$.)
b) suoraa
c) ympyrää (keskipiste origo ja säde $\sqrt{3}$)
d) paraabelia
(Vasemmalle aukeava paraabeli $x = -y^2 + 3$.)

**310.** $(-1, 2)$ ja $(2, -4)$

**311.** a)




Huippu on pisteessä $(-4, 0)$.
b) $y = \sqrt{x+4}$ tai $y = -\sqrt{x+4}$

**312.** $y = -x^2 + 5x - 2$
(Yhtälöt $a - b + c = -8$, $a + b + c = 2$ ja $9a + 3b + c = 4$.)

**313.** Kuvion mukaan leikkauspisteitä on neljä. Leikkauspisteet ovat $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(-2, 3)$ ja $(2, 3)$.
(Ratkaistaan jommastakummasta yhtälöstä $x^2$ ja sijoitetaan toiseen yhtälöön.)

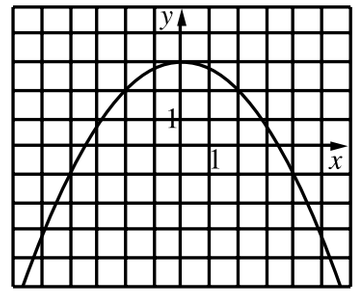
**314.** $y = 2x - 2$
(Paraabelin muodosta nähdään, että suora, joka ei ole pystysuora, on paraabelin tangentti, jos ja vain jos paraabelilla ja suoralla on yksi yhteinen piste. Pisteen (1, 0) kautta kulkevat suorat (paitsi pystysuora) ovat muotoa $y = k(x - 1)$. Paraabelin ja suoran leikkauspisteen $x$-koordinaatti ratkaistaan yhtälöllä $x^2 - 1 = k(x - 1)$. Yhtälöllä tulee olla yksi juuri.)

**315.** a) $y = \frac{1}{4p}x^2$
(Sievennetään yhtälö $\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = |y+p|$.)
b) $y = x^2$
c) polttopiste $(0, -\frac{1}{12})$, johtosuora $y = \frac{1}{12}$

**316.** 12,5 cm
(Paraabeli kulkee pisteiden (0, 0), (10, 2) ja $(-10, 2)$ kautta, joten paraabelin yhtälö on $y = 0{,}02x^2$.)

**317.** paraabelin $y = \frac{1}{16}x^2 - 4$
(Piste $(x, y)$ on ehdon täyttävän ympyrän keskipiste, jos ja vain jos pisteen etäisyys origosta on yhtä suuri kuin etäisyys suorasta $y = -8$.)

**318.** $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3$




**319.** suoran $x = 0$ eli $y$-akselin
(Sievennetään yhtälö $\sqrt{x^2 + y^2} = |y|$.)

**320.** a) paraabelia

(Oikealle aukeava paraabeli $x = \frac{1}{9}y^2$.)

b) kahta toisensa leikkaavaa suoraa
($y = 3x$ tai $y = -3x$)
c) paraabelia (Ylöspäin aukeava paraabeli $y = 9x^2$.)
d) ympyrää (Keskipiste origo ja säde 3.)

**321.** $(-5, 4)$ ja $(-2\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$

**322.** $y = \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x$

**323.** Ei mahdu, sillä sillan alta mahtuu vain 3,6 metrin korkuinen 4,2 metriä leveä kuljetus.
(Sijoitetaan paraabeli koordinaatistoon kulkemaan pisteiden $(-4, 0)$, $(0, 5)$ ja $(4, 0)$ kautta. Paraabelin yhtälö on tällöin
$y = -\frac{5}{16}x^2 + 5$.)

**324.** $(0, 3)$, $(-\sqrt{5}, -2)$ ja $(\sqrt{5}, -2)$
(Paraabelin $y = -x^2 + 3$ ja ympyrän $x^2 + y^2 = 9$ leikkauspisteet.)

**325.** $y = x - \frac{1}{4}$, sivuamispiste on $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

(Suoran $y = x$ suuntaiset suorat ovat muotoa $y = x + b$. Suoralla ja paraabelilla tulee olla vain yksi yhteinen piste.)

**326.** $y = \frac{-3 + \sqrt{5 + 4x}}{2}$ tai $y = \frac{-3 - \sqrt{5 + 4x}}{2}$

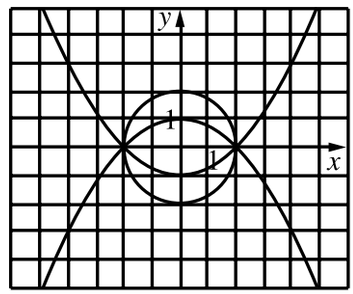
(Ratkaistaan $y$ yhtälöstä $y^2 + 3y + 1 - x = 0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.)

**327.** Pisteet muodostavat vasemmalle aukeavan paraabelin $x = -y^2 + 6y - 6$.
(Eliminoidaan muuttuja $t$ yhtälöparista $x = 3 - t^2$ ja $y = 3 - t$.)

**328.** paraabelin $y = 2x^2 + 1$
(Olkoon kuminauhan keskipiste $(x, y)$. Toinen päätepiste $(2x, 2y)$ toteuttaa paraabelin yhtälön.)

**329.** $x^2 + y^2 + 2xy - 8y = 0$
(Sievennetään yhtälö
$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x - y - 2|}{\sqrt{2}}$.)

**330.** paraabelit $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ ja $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$




(Ehdon täyttäviä pisteitä on sekä ympyrän sisällä että ympyrän ulkopuolella. Ympyrän ulkopuolella olevat pisteet toteuttavat yhtälön $\sqrt{x^2 + y^2} - 2 = |y|$ ja sisäpuolella olevat pisteet yhtälön $2 - \sqrt{x^2 + y^2} = |y|$. Ensimmäinen yhtälö sievenee muotoon $|y| = \frac{1}{4}x^2 - 1$, missä $x \leqslant -2$ tai $x \geqslant 2$, ja jälkimmäinen muotoon $|y| = -\frac{1}{4}x^2 + 1$, missä $-2 \leqslant x \leqslant 2$.)

**331.** Yhtälö on $x^2 - 3y^2 = -12$. Piirretään käyrät $y = \sqrt{\frac{1}{3}x^2 + 4}$ ja $y = -\sqrt{\frac{1}{3}x^2 + 4}$.
Käyrä on niin sanottu hyperbeli.

**332.** Yhtälö on $4x^2 + 3y^2 = 12$. Piirretään käyrät $y = \sqrt{4 - \frac{4}{3}x^2}$ ja $y = -\sqrt{4 - \frac{4}{3}x^2}$.
Käyrä on niin sanottu ellipsi.

## Kompleksitason yhtälöitä

**333.** a) $2 + 2i$ b) $10 - 11i$ c) $7 + 26i$

**334.** a) $5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3i + 3^2 i^2$
$= 25 - 30i - 9$
$= 16 - 30i$
b) $5^2 - 3^2 i^2 = 25 + 9 = 34$

**335.** $\frac{1}{z} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$, Koska

$(-1 + 2i) \cdot (-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i - \frac{2}{5}i = 1,$

niin kyseessä todella on luvun $z$ käänteisluku.

**336.** a) $-\frac{7}{17} - \frac{11}{17}i$ b) $-3 + \frac{3}{2}i$

**337.** a) $\frac{1}{4} - 2i$ (Yhtälöpari $4x = 1$ ja $2y = -4$.)

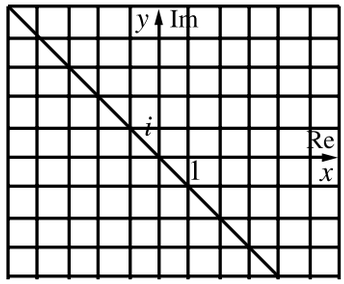
b) $-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}i$ (Yhtälöpari $4x = -y$ ja $2y = x + 3$.)

**338.** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

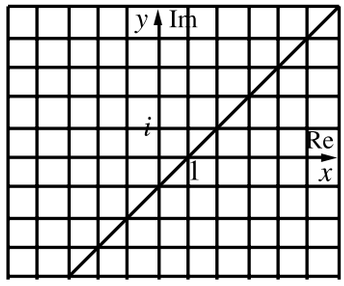
(Yhtälöpari $5x = -y + 3$ ja $5y - 2 = x$. Yhtälö on muuttujan $z$ ensimmäisen asteen yhtälö, joten se voidaan ratkaista myös tavallisella yhtälönratkaisumenetelmällä. Poistamalla sulkeet ja siirtämällä muuttujan $z$ termit vasemmalle puolelle ja muut termit oikealle, saadaan yhtälö $(5 - i)z = 3 + 2i$. Siis $z = \frac{3 + 2i}{5 - i}$.)

**339.** a) Yhtälön toteuttavat kompleksiluvut $z = x + yi$, joille pätee $y = 0$, eli siis reaaliset kompleksiluvut.
b) Yhtälön toteuttavat kompleksiluvut $z = x + yi$, joille pätee $x = 0$, eli siis puhtaasti imaginaariset kompleksiluvut.
c) Yhtälön toteuttaa vain luku 0.

**340.** Yhtälön toteuttavat ne kompleksiluvut $z = x + yi$, joille pätee $x + y = 0$. Yhtälön ratkaisut muodostavat kompleksitason suoran.




**341.** Pisteet, jotka ovat suoralla $x - y - 1 = 0$.

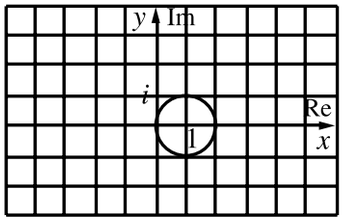



**342.** $z = 0$ tai $z = -2$ tai $z = 1 + \sqrt{3}\,i$ tai $z = 1 - \sqrt{3}\,i$
(Yhtälöpari $x^2 - y^2 + 2x = 0$ ja $2xy - 2y = 0$. Jälkimmäinen yhtälö toteutuu, kun $y = 0$ tai $x = 1$.)

**343.** $z = 1 - i$ tai $z = -1 + i$
(Yhtälöpari $x^2 - y^2 = 0$ ja $2xy = -2$. Ensimmäinen yhtälö toteutuu, kun $x = y$ tai $x = -y$.)

**344.** $z = -i$ tai $z = 2i$
(Yhtälön molemmat puolet kerrotaan aluksi luvulla $z$. Saadaan yhtälöpari $x^2 + y^2 = 2 + y$ ja $0 = -x$.)

**345.** Pisteet $z = x + yi$, joille pätee $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Pisteet muodostavat ympyrän, jonka keskipiste on reaaliluku 1 (piste (1, 0)) ja jonka säde on 1.




**346.** $z = 1 + i$ tai $z = -1 - i$
(Ensimmäinen yhtälö on $x^2 + y^2 = 2$. Jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan $y = x$.)

**347.** a) $z = 5i$ tai $z = -5i$

b) $z = \sqrt{5}\,i$ tai $z = -\sqrt{5}\,i$

c) $z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$ tai $z = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$

$$\left(z = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2}\right.$$

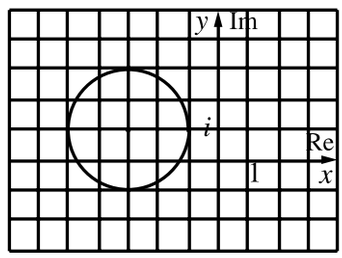
$$\left. = \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2}\right)$$

d) $z = 1 + 2i$ tai $z = 1 - 2i$

**348.** a) $\sqrt{2}$ b) 13
c) 7 d) 3

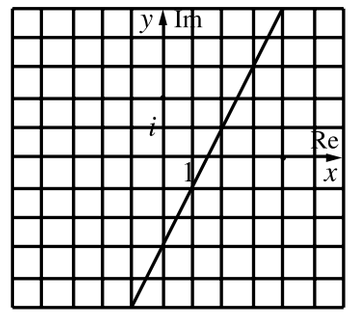
**349.** a) $\sqrt{13} \approx 3{,}6$ b) 13
c) $\sqrt{41} \approx 6{,}4$ d) 8

**350.** a) Ympyrää, jonka keskipiste on origo ja säde 1.
b) Ympyrää, jonka keskipiste on $i$ ja säde 5.
c) Ympyrää, jonka keskipiste on $-3 + i$ ja säde 2.




**351.** Ympyrää, jonka keskipiste on origo ja säde $\sqrt{2}$.
(Yhtälö $\sqrt{(x-y)^2 + (x+y)^2} = 2$ korotetaan toiseen potenssiin.)

**352.** Suoraa $y = 2x - 3$.
(Voidaan sijoittaa $z = x + yi$, korottaa toiseen potenssiin ja sieventää. Voidaan ratkaista myös geometrisesti: Pisteet, jotka toteuttavat yhtälön, ovat yhtä etäällä luvuista 4 ja $2i$. Yhtälö esittää siis lukuja 4 ja $2i$ (pisteitä (4, 0) ja (0, 2)) yhdistävän janan keskinormaalia.

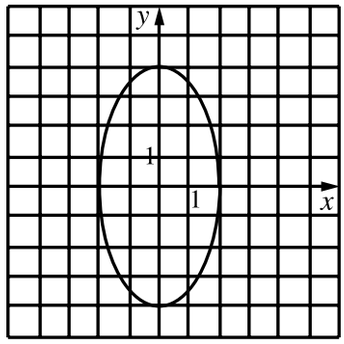



**353.** paraabelia $y = x^2 + \frac{1}{4}$

## Ellipsi ja hyperbeli

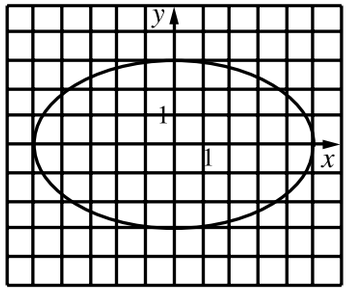
**355.** a) $x$-akselin pisteissä $(-2, 0)$ ja $(2, 0)$, $y$-akselin pisteissä $(0, -4)$ ja $(0, 4)$

b) $y = \sqrt{16 - 4x^2}$ tai $y = -\sqrt{16 - 4x^2}$

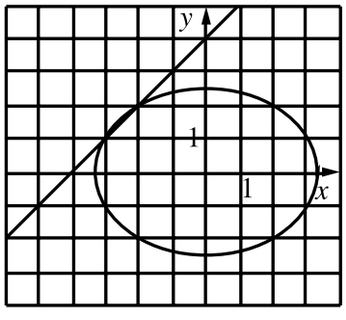



**356.** a) $x$-akselin pisteissä $(-5, 0)$ ja $(5, 0)$, $y$-akselin pisteissä $(-3, 0)$ ja $(3, 0)$

b) $y = \frac{1}{5}\sqrt{225 - 9x^2}$ tai $y = -\frac{1}{5}\sqrt{225 - 9x^2}$




**357.** pisteissä $(-2, 2)$ ja $(-3\frac{3}{25}, \frac{22}{25})$




**358.** a) $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 3$

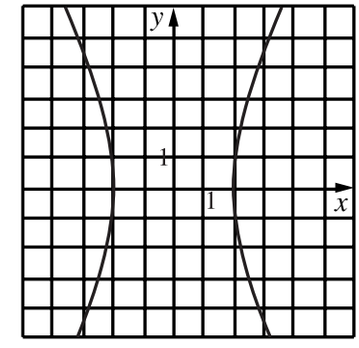
b) Saadaan yhtälö $6\sqrt{(x \pm 1)^2 + y^2} = 9 \pm 4x$, missä + -merkit ja $-$ -merkit vastaavat toisiaan. Merkki riippuu siitä, kumpi alkuperäisistä neliöjuurilausekkeista jätettiin yksinään.

c) Saadaan yhtälö $20x^2 + 36y^2 = 45$.

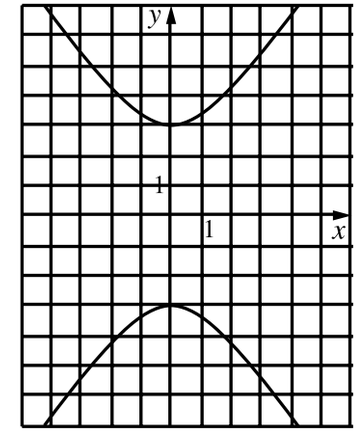
**359.** Polttosäde on viivaimen ja langan pituuksien erotus.

**360.** a) $x$-akselin pisteissä $(-2, 0)$ ja $(2, 0)$. Hyperbeli ei leikkaa $y$-akselia

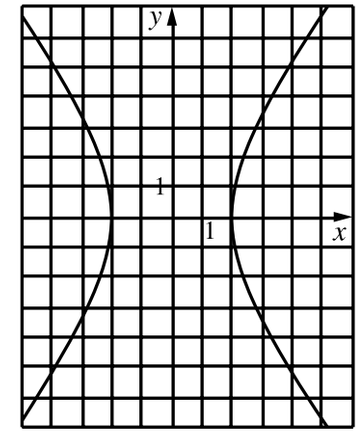
b) $y = \sqrt{4x^2 - 16}$ tai $y = -\sqrt{4x^2 - 16}$



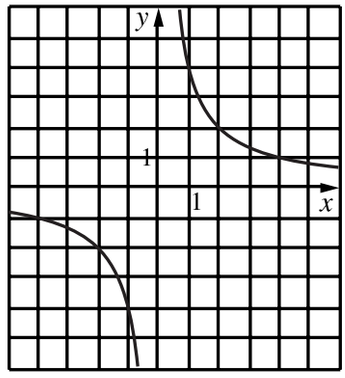

**361.** a) $y = \frac{1}{2}\sqrt{9x^2 + 36}$ tai $y = -\frac{1}{2}\sqrt{9x^2 + 36}$



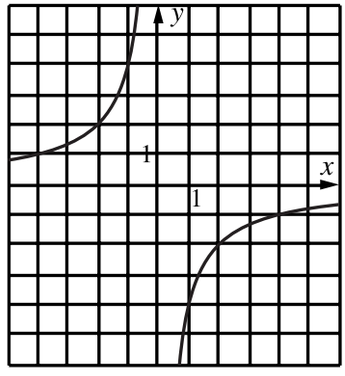

b) $y = \frac{1}{2}\sqrt{9x^2 - 36}$ tai $y = -\frac{1}{2}\sqrt{9x^2 - 36}$



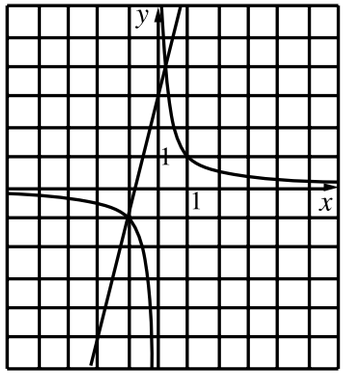
**362.** a) Piirretään käyrä $y = \frac{4}{x}$.




b) Piirretään käyrä $y = -\frac{4}{x}$.




**363.** $(-1, -1)$ ja $(\frac{1}{4}, 4)$




**364.** a) hyperbeliä b) ympyrää
c) ellipsiä d) hyperbeliä

**365.** Piste muodostuu, kun taso leikkaa kartiopintaa vain huippupisteessä. Suora muodostuu, kun taso sivuaa kartiopinnan vaippaa, ja kaksi toisensa leikkaavaa suoraa muodostuu, kun taso kulkee pitkin kartiopinnan akselia.

## Kertaustehtäviä

**367.** a) $-3 + \sqrt{10}$ $(= \sqrt{10} - 3)$
b) $1 + \sqrt{10} - \sqrt{15}$
(Lukujen erotuksen itseisarvo.)

**368.** $x = 1$ tai $x = -7$
$(x + 3 = 4$ tai $x + 3 = -4)$

**369.** $a$:n arvoilla 1 ja 5 (Ratkaistaan yhtälö $|(3a - 1) - (a + 5)| = 4$ eli yhtälö $|2a - 6| = 4$.)

**370.** a) $\frac{5}{3} < x < 3$ eli ratkaisuväli on $]\frac{5}{3}, 3[$.
(Tulee olla $-2 < 3x - 7 < 2$ eli $3x - 7 > -2$ ja $3x - 7 < 2$.)
b) $x \leqslant -7$ tai $x \geqslant -4$
(Tulee olla $2x + 11 \leqslant -3$ tai $2x + 11 \geqslant -3$. Ratkaisujoukkoa ei voida kuvata kaksoisepäyhtälöllä tai välin merkinnällä.)

**371.** a) $x = -3$ $(x + 6 = x$ tai $x + 6 = -x)$
b) $x = -6$ tai $x = \frac{1}{4}$
$(3x - 7 = 5x + 5$ tai $3x - 7 = -(5x + 5))$

**372.** a) $\sqrt{37} \approx 6{,}1$ b) 4 c) 169

**373.** $\frac{\sqrt{41}}{2} \approx 3{,}2$ (Sivun $AB$ keskipiste on $(2, \frac{5}{2})$.)

**374.** $(8, -9)$ (Yhtälöt $\frac{x + (-4)}{2} = 2$ ja $\frac{y + 3}{2} = -3$.)

**375.** 4,5 (Kolmio ympäröidään suorakulmiolla, jonka pinta-alasta vähennetään kolmen suorakulmaisen kolmion pinta-alat.)

**376.** a) $\sqrt{65}$
b) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 65$
c) ympyrän sisällä
(Pisteen $(-3, -7)$ etäisyys keskipisteestä on 8 ja siis pienempi kuin ympyrän säde.)

**377.** $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 40$

**378.** a) keskipiste $(0, 0)$ ja säde $\sqrt{13}$
$(x^2 + y^2 = 13)$
b) keskipiste $(-6, 0)$ ja säde $6$
$((x + 6)^2 + y^2 = 36)$
c) keskipiste $(-3, \frac{3}{2})$ ja säde $\frac{9}{2}$
$((x + 3)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{81}{4})$

**379.** $\sqrt{73} - 3 \approx 5{,}5$ (Lasketaan pisteen $(8, 4)$ etäisyys ympyrän keskipisteestä $(0, 1)$ ja vähennetään ympyrän säde $3$.)

**380.** $a \leqslant -\frac{17}{4}$ (Yhtälö on keskipistemuodossa $(x + \frac{1}{2})^2 + (y + 2)^2 = a + \frac{17}{4}$. Yhtälö ei esitä ympyrää, kun $a + \frac{17}{4} \leqslant 0$.)

**381.** $s_1$: $\frac{3}{2}$, $s_2$: $-\frac{1}{4}$, $s_3$: $0$
$s_4$: ei kulmakerrointa

**382.** a) Pienenee kolmella.
b) Pienenee 15:llä.
c) Suurenee 12:lla.
($y$:n muutos on $x$:n muutos kerrottuna $-3$:lla.)

**383.** a) $-\frac{3}{2}$ b) ei kulmakerrointa
c) $-\frac{5}{3}$ d) $0$

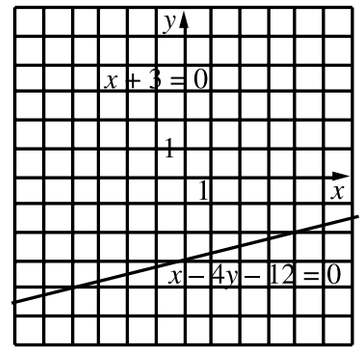
**384.** Ovat, sillä suorien kulmakertoimet ovat yhtä suuret.
(Kulmakertoimet ovat $-\frac{3}{2}$.)

**385.** a) $71{,}6°$ ($\tan\alpha = 3$)
b) $-14{,}0°$ (Suuntakulman itseisarvo saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = \frac{1}{4}$. Voidaan myös suoraan määrittää laskimella suunnattu kulma, jolle $\tan\alpha = -\frac{1}{4}$.)
c) $85{,}6°$

**386.** a) $y = -\frac{8}{3}x$
b) $y = \frac{1}{2}x - 4$ $(y - (-3)) = \frac{1}{2}(x - 2))$
c) $y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$

**387.** a) $y = 7$ b) $x = -4$

**388.** a) $y = 2x - 9$ $(2x - y - 9 = 0)$
b) On. (Pisteen $(-17, -43)$ koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön.
c) $x$-akselin pisteessä $(\frac{9}{2}, 0)$ ja $y$-akselin pisteessä $(0, -9)$.

**389.**



**390.** a) Suoralla $2x + y - 3 = 0$ ja sen yläpuolella.
b) Suoran $2x - 5y + 1 = 0$ alapuolella.

**391.** a) $y = 4x + 80$
(Pisteiden $(10, 120)$ ja $(30, 200)$ kautta kulkevan suoran yhtälö.)
b) 55 myyjää
(Ratkaistaan yhtälö $4x + 80 = 300$.)

**392.** a) $(-\frac{9}{7}, -\frac{15}{7})$ b) $(-32, -52)$

**393.** 20 (Kannaksi valitaan suorien $x$-akselista erottama jana, jonka pituus on $10$. Kolmion korkeus on leikkauspisteen $y$-koordinaatin $-4$ itseisarvo.)

**394.** $x = -\frac{6}{5}$, $y = -\frac{24}{5}$

(Ensin kannattaa poistaa nimittäjät kertomalla ensimmäinen yhtälö luvulla 6 ja jälkimmäinen yhtälö luvulla 4. Saadaan yhtälöpari $3x - 2y = 6$ ja $2x - 3y = 12$.)

**395.** liittymismaksu 85 euroa ja kuukausimaksu 25 euroa
(Jos $x$ on liittymismaksu ja $y$ jäsenmaksu euroina, niin $x + 3y = 160$ ja $x + 5y = 210$.)

**396.** valtion tukemaa lainaa 32 miljoonaa euroa ja markkinakorkoista 48 miljoonaa euroa
(Yhtälöpari $x + y = 80$ ja $0{,}04x + 0{,}09y = 0{,}07 \cdot 80$.)

**397.** $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$

**398.** $x^2 + y^2 - 8x - 5y + 16 = 0$
(Ratkaistaan yhtälöryhmä, joka saadaan, kun pisteiden koordinaatit sijoitetaan yhtälöön $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Toinen tapa on määrittää kahden pisteitä yhdistävän janan keskinormaalien leikkauspiste.)

**399.** Yhtälöt esittävät suoria, joiden kulmakertoimet ovat $-\frac{a}{3}$ ja $\frac{1}{3}$. Kun $a \neq -1$, suorat ovat erisuuntaiset, joten yhtälöparilla on yksi ratkaisu. Kun $a = -1$, yhtälöt esittävät samaa suoraa, joten yhtälöparilla on silloinkin ratkaisu (äärettömän monta ratkaisua). Siis yhtälöparilla on aina ainakin yksi ratkaisu. Ratkaisuja on enemmän kuin yksi, kun $a = -1$.

**400.** $(2, -1)$ ja $(1, -2)$

**401.** $(-\frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$
(Määritetään pisteet, joissa pisteen $(-15, 5)$ ja ympyrän keskipisteen (origon) kautta kulkeva suora leikkaa ympyrän ja valitaan leikkauspisteistä se, joka on lähempänä pistettä $(-15, 5)$.)

**402.** $(-\frac{7}{5}, -\frac{1}{5})$ ja $(1, 1)$

**403.** Kun sijoitetaan $x = 0$, saadaan yhtälö $4y^2 + 4y + 1 = 0$, jolla on yksi vain juuri $y = -\frac{1}{2}$. Siis $y$-akseli sivuaa ympyrää, ja sivuamispiste on $(0, -\frac{1}{2})$.
(Toinen tapa on jakaa ensin yhtälö luvulla 4, määrittää neliöksi täydentämällä ympyrän keskipiste $(2, -\frac{1}{2})$ ja säde 2, ja todeta, että keskipiste on säteen etäisyydellä $y$-akselista.)

**404.** $c = 2\sqrt{5}$ tai $c = -2\sqrt{5}$
(Yhtälön $x^2 + (-x + c)^2 = 10$ eli yhtälön $2x^2 - 2cx + c^2 - 10 = 0$ diskriminantin tulee olla nolla. Diskriminantti on $(-2c)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (c^2 - 10) = -4c^2 + 80$.
Toinen tapa on ratkaista, millä $c$:n arvolla suoran etäisyys ympyrän keskipisteestä (origo) on säteen $(\sqrt{10})$ suuruinen.)

**405.** Ovat, sillä kulmakertoimien $\frac{3}{4}$ ja $-\frac{4}{3}$ tulo on $-1$.

**406.** normaalien yhtälöt $x + 2y - 7 = 0$ ja $x = -3$, pinta-ala 25
(Kolmio on suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat 10 ja 5.)

**407.** a) $a = 0$
(Kun $a \neq 0$, suorilla on kulmakertoimet $\frac{3}{a}$ ja $-a$. Kulmakertoimien tulo on aina $-3$, siis ei koskaan $-1$. Kun $a = 0$, suorat ovat $y$- ja $x$-akselin suuntaiset suorat $3x = 4$ ja $y = 8$ ja siis toisiaan vastaan kohtisuorassa.)
b) Ei millään $a$:n arvolla.
(Kun $a \neq 0$, molemmilla suorilla on kulmakertoimet $\frac{3}{a}$ ja $-a$. Yhtälö $\frac{3}{a} = -a$ tulee muotoon $a^2 = -3$, joten sillä ei ole juuria.
Kun $a = 0$, suorat ovat $y$- ja $x$-akselin suuntaiset suorat $3x = 4$ ja $y = 8$, jotka eivät ole yhdensuuntaiset.)

**408.** $y = \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

(Piste $(-2, 3)$ on ympyrällä, joten määritetään pisteen $(-2, 3)$ kautta kulkeva pisteeseen piirrettyä sädettä vastaan kohtisuora suora.)

**409.** $(\frac{1}{3}, 0)$

(Piste, jossa pisteitä $(-2, 3)$ ja $(4, 1)$ yhdistävän janan keskinormaali $y - 2 = 3(x - 1)$ leikkaa $x$-akselin. Toinen tapa on merkitä kysyttyä pistettä $(x, 0)$ ja muodostaa etäisyyden lausekkeista yhtälö
$\sqrt{(x+2)^2 + 3^2} = \sqrt{(x-4)^2 + 1^2}$.
Yhtälön ratkaisu aloitetaan korottamalla molemmat puolet toiseen potenssiin.)

**410.** $(\frac{3}{2}, 2)$

(Määritetään kolmion kahden sivun keskinormaalien leikkauspiste. Toinen tapa on määrittää ensin ympyrän yhtälö ratkaisemalla yhtälöryhmä, joka saadaan, kun pisteiden koordinaatit sijoitetaan yhtälöön
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. )

**411.** $(1, 3)$
(Muodostetaan ympyrän keskipisteen $(2, 0)$ kautta kulkeva suoran normaali. Lähin piste on toinen normaalin ja ympyrän leikkauspisteistä.)

**412.** a) $\frac{3}{\sqrt{10}} \approx 0{,}95$

b) $\frac{24}{\sqrt{37}} \approx 3{,}9$ (Yhtälö saatetaan ensin yleiseen muotoon $x - 6y - 4 = 0$.)

c) 9

**413.** $x^2 + y^2 = \frac{900}{61}$

(Ympyrän säde $\frac{30}{\sqrt{61}}$ on origon etäisyys pisteiden kautta kulkevasta suorasta
$5x + 6y - 30 = 0$.)

**414.** Suoran etäisyys ympyrän keskipisteestä $(-3, 1)$ on $\frac{40}{13} \approx 3{,}08$. Koska etäisyys on suurempi kuin ympyrän säde 3, suoralla ja ympyrällä ei ole yhteisiä pisteitä.
(Toinen tapa on ryhtyä ratkaisemaan ympyrän ja suoran leikkauspisteitä ja päätyä toisen asteen yhtälöön, jonka diskriminantti on negatiivinen.)

**415.** $\frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1{,}8$
(Lasketaan esimerkiksi ensimmäisellä suoralla olevan pisteen $(1, 1)$ etäisyys toisesta suorasta.)

**416.** $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{3}}$ ja $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}$
(Pisteen $(2, 0)$ kautta kulkevien suorien yhtälöt ovat muotoa $y = k(x - 2)$ eli
$kx - y - 2k = 0$. Suoran etäisyyden origosta tulee olla 1. Ratkaistaan yhtälö $\frac{|-2k|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$.
Toinen tapa on ryhtyä ratkaisemaan suoran $y = k(x - 2)$ ja ympyrän leikkauspisteitä ja määrittää sellainen $k$:n arvo, että ratkaisuja on yksi. Menetelmä johtaa toisen asteen yhtälön diskriminantin tutkimiseen.)

**417.** $3x + 4y + 27 = 0$ ja $3x + 4y - 3 = 0$
(Määritetään sellainen $c$:n arvo, että suoran $3x + 4y + c = 0$ etäisyys ympyrän keskipisteestä $(0, -3)$ on säteen 3 suuruinen. Toinen tapa on ratkaista leikkauspisteitä ja päätyä diskriminanttiehtoon.)

**418.** $y = -\frac{1}{12}x^2$

(Yhtälö $|y - 3| = \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$.)

**419.** $(0, 1)$ ja $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

($x$-koordinaatti saadaan yhtälöllä
$3x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 1$.)

**420.** $(-2, -1)$ ja $(-20, 5)$
(Helpoimmilla laskuilla päästään, kun paraabelin yhtälöön sijoitetaan $x = -3y - 5$.)

**421.** $x = \frac{1}{4}y^2 - y - 5$

(Yhtälöön $x = ay^2 + by + c$ sijoitetaan pisteiden koordinaatit ja ratkaistaan yhtälöryhmä.)

**422.** $y = 3x - \frac{9}{4}$, pisteessä $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$

(Ratkaistaan, millä $b$:n arvolla suoralla $y = 3x + b$ ja paraabelilla $y = x^2$ on yksi yhteinen piste. Yhtälön $x^2 = 3x + b$ eli yhtälön $x^2 - 3x - b = 0$ diskriminantin $9 + 4b$ tulee olla 0. Yhtälön ainoa juuri on leikkauspisteen $x$-koordinaatti.)

## TEHTÄVÄSARJOJA

### Sarja A

**1.** a) $y = \frac{1}{4}x + \frac{19}{4}$ $(x - 4y + 19 = 0)$

b) $y = -4x + \frac{1}{2}$ $(8x + 2y - 1 = 0)$

**2.** $y = -2x + 6$

(Leikkauspiste on $(\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$.)

**3.** 23. toukokuuta

(Lämpötilan muutosta kuvaa pisteiden $(1; 5{,}6)$ ja $(32; 11{,}8)$ kautta kulkeva suora. Suoran yhtälö on $y - 5{,}6 = 0{,}2(x - 1)$. Ratkaistaan tämän suoran ja suoran $y = 10$ leikkauspiste.)

**4.** $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 9$

(Ympyrän $x^2 + y^2 - 12y + 32 = 0$ keskipiste on $(0, 6)$ ja säde 2. Törmänneen ympyrän keskipiste on suoralla $y = 3$, ja ympyröiden keskipisteiden etäisyys on säteiden summa 5. Keskipisteen etäisyys $y$-akselista ratkaistaan suorakulmaisesta kolmiosta, jonka hypotenuusa on keskipisteiden yhdysjana. Keskipiste on $(-4, 3)$.)

**5.** origokeskisen ympyrän, jonka säde on 2

(Käyrän yhtälö $x^2 + y^2 = 4$ saadaan sieventämällä ehto $(x + 3)^2 + y^2 + (x - 3)^2 + y^2 = 26$.)

**6.** $(-1, 0)$ ja $(-\frac{7}{5}, -\frac{2}{5})$ (Yhtälöön

$\frac{|x + 2y + 2|}{\sqrt{5}} = 2 \cdot \frac{|4x - 2y + 5|}{2\sqrt{5}}$ sijoitetaan

$y = x + 1$. Kun yhtälö edelleen kerrotaan $\sqrt{5}$:llä, saadaan yhtälö $|3x + 4| = |2x + 3|$.)

## Sarja B

**1.** piiri $\sqrt{17} + \sqrt{20} + \sqrt{13} \approx 12{,}2$, pinta-ala 7
(Keskipisteet ovat $(3, 1)$, $(1, 5)$ ja $(-1, 2)$. Kolmion pinta-ala lasketaan niin, että kolmio ympäröidään suorakulmiolla ja suorakulmion pinta-alasta vähennetään kolmen suorakulmaisen kolmion pinta-alat.)

**2.** $(-5, 4)$ (Määritetään pisteen $(-3, 9)$ kautta kulkevan suoran $2x + 5y - 10 = 0$ normaalin ja suoran $2x + 5y - 10 = 0$ leikkauspiste. Normaalin yhtälö on $5x - 2y + 33 = 0$.)

**3.** $x = 4$ ja $y = -1$
(Leikkauspisteet ovat $(1, -1)$ ja $(4, 2)$. Ympyrän keskipiste on $(1, 2)$. Tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan.)

**4.** suurin pituus $5 + \sqrt{10}$ ja pienin pituus $5 - \sqrt{10}$
(Ympyrän keskipiste on $(2, -1)$ ja säde 5. Piste $A$ on ympyrän sisällä. Lasketaan pisteen $A$ etäisyys keskipisteestä. Suurin pituus on säteen ja etäisyyden summa, ja pienin säteen ja etäisyyden erotus.)

**5.** Ympyrän, jonka keskipiste on $(5, 3)$ ja säde $2\sqrt{5}$.
(Käyrän yhtälö $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 14 = 0$ saadaan sieventämällä ehto
$\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$.)

**6.** a) Akselien kulmakertoimet $xy$-koordinaatistossa ovat $\frac{1}{3}$ ja $-3$. Koska kulmakertoimien tulo on $-1$, akselit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

b) $B = (3\sqrt{10}, 0)$ ja $C = (0, 2\sqrt{10})$
(Lasketaan janojen $AB$ ja $AC$ pituudet.)

c) $v = -\frac{11}{3}u$ eli $11u + 3v = 0$
(Määritetään ensin $xy$-koordinaatiston origon koordinaatit $uv$-koordinaatistossa. Koordinaattien itseisarvot saadaan esimerkiksi laskemalla pisteen $(2, -3)$ etäisyys $xy$-koordinaatiston kautta kulkevista $u$- ja $v$-akselin suuntaisista suorista $x - 3y = 0$ ja $3x + y = 0$. $xy$-koordinaatiston origo on $uv$-koordinaatiston piste $(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{11}{\sqrt{10}})$.)

## Sarja C

**1.** a) $y = 5x + 10$ (Pisteiden $(14, 80)$ kautta ja $(17, 95)$ kautta kulkevan suoran yhtälö.)
b) 135 pulloa (Yhtälöön $y = 5x + 10$ sijoitetaan $x = 25$.)
c) $-2$ °C (Ratkaistaan yhtälö $5x + 10 = 0$.)

**2.** Anne 66 euroa, Eino 51 euroa ja Iris 33 euroa.
(Jos $x$ on Annen, $y$ Einon ja $z$ Iriksen palkkio, niin $x + y + z = 150$, $x = 2z$ ja $x = y + 15$.)

**3.** a) $a = \frac{3}{4}$ (Suorat leikkaavat $y$-akselin pisteessä $(0, \frac{3}{2})$ ja $(0, 2a)$. Tulee olla $2a = \frac{3}{2}$.)

b) $a = -8$ (Suorien yhtälöiden ratkaistut muodot ovat $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}$ ja $y = 4x + 2a$.

Suorat ovat yhdensuuntaiset, kun $-\frac{a}{2} = 4$ eli $a = -8$. Ratkaistujen muotojen vakiotermit ovat tällöin erisuuria, eli suorat ovat eri suoria.)

c) $a = \frac{1}{2}$, leikkauspiste $(\frac{2}{17}, \frac{25}{17})$

(Kohtisuoruusehto $4 \cdot (-\frac{a}{2}) = -1$.)

**4.** $A(4, 4)$ ja $C(5, -3)$
(Kärkipiste $A$ on suorien $y = x$ ja $y = 3x - 8$ leikkauspiste. Kolmion sivu $BC$ on pisteen $B$ kautta kulkevalla suoran $y = x$ normaalilla $y = -x + 2$. Sivun $BC$ keskipiste on suorien $y = -x + 2$ ja $y = 3x - 8$ leikkauspiste $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$.
Pisteen $C$ koordinaatit saadaan yhtälöistä $\frac{x+0}{2} = \frac{5}{2}$ ja $\frac{y+2}{2} = -\frac{1}{2}$.)

**5.** $(x - 12)^2 + (y - 12)^2 = 12^2$ tai $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$
(Ympyrän keskipiste on $(a, a)$ ja säde $a$, missä $a > 0$. Keskipisteen etäisyyden pisteiden $(8, 0)$ ja $(0, 6)$ kautta kulkevasta suorasta $3x + 4y - 24 = 0$ tulee olla säteen suuruinen.
Saadaan yhtälö $\frac{|7a - 24|}{5} = a$.)

**6.** paraabelilla $y = 2x^2$
(Origon kautta piirretyn suoran yhtälö on $y = kx$, missä $k \neq 0$. Edelleen on $A = (k, k^2)$ ja $B = (2k, 2k^2)$, joten $P = (k, 2k^2)$. Koska pisteen $P$ koordinaateille $x = k$ ja $y = 2k^2$ pätee $y = 2x^2$, piste $P$ on paraabelilla $y = 2x^2$.)

## Sarja D

**1.** $(0, 28)$ ja $(0, -20)$
(Ympyrän säde on $25$ ja yhtälö $(x + 7)^2 + (y - 4)^2 = 625$. Yhtälöön sijoitetaan $x = 0$.)

**2.** $c = -3$ (Kahden ensimmäisen suoran leikkauspisteen $(1, 4)$ koordinaattien tulee toteuttaa myös kolmas yhtälö.)

**3.** $x = -8$ tai $x = -4$ tai $x = -2$ tai $x = 4$
(Yhtälö toteutuu, kun $x^2 + 5x = 5x + 16$ tai $x^2 + 5x = -(5x + 16)$.)

**4.** 1,6 km (Lasketaan ympyrän keskipisteen $(-1, 3)$ etäisyys suorasta ja vähennetään ympyrän säde $\sqrt{10}$.)

**5.** suora $y = \frac{3}{4}x + 1$ ja $y$-akseli, kulma on $53°$
(Pisteen $(0, 1)$ kautta kulkevan suoran, paitsi $y$-akselin suuntaisen suoran, yhtälö on muotoa $y = kx + 1$ eli $kx - y + 1 = 0$. Suora on ympyrän tangentti, kun etäisyys ympyrän keskipisteestä $(2, 0)$ on säteen $2$ suuruinen eli kun $\frac{|2k + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2$. Yhtälöllä on vain yksi ratkaisu $k = \frac{3}{4}$. Toinen tangentti havaitaan kuviosta.
Kulma lasketaan vähentämällä suorasta kulmasta suoran $y = \frac{3}{4}x + 1$ suuntakulma.)

**6.** $x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y = 0$ (Sievennetään ehto $\frac{|x + y + 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$.)

## Sarja E

**1.** $5$ (Sivun $BC$ keskipiste on $M(1, 2)$. Lasketaan janan $AM$ pituus.)

**2.** $y = 3x - 10$ tai $y = -2x - 10$
(Kysytyn suoran ja suoran $y = \frac{1}{2}x$ leikkauspisteen $x$-koordinaatin tulee olla $4$ tai $-4$.)

**3.** $(2, 6)$ ja $(\frac{14}{5}, \frac{28}{5})$
(Ratkaistaan pisteet, joissa pisteitä $(1, 4)$ ja $(3, 8)$ yhdistävän janan keskinormaali $y - 6 = -\frac{1}{2}(x - 2)$ leikkaa ympyrän.)

**4.** a) kuparia 59,0 % ja sinkkiä 41,0 %
(Olkoon $x$ (m$^3$) kuparin ja $y$ (m$^3$) sinkin määrä kuutiometrissä seosta. Saadaan yhtälöpari: $x + y = 1$ ja $8960x + 7130y = 8210$, josta ratkaistaan $x \approx 0{,}5902$ ja $y \approx 0{,}4098$.)
b) kuparia 64,4 % ja sinkkiä 35,6 %
(Yhdessä kuutiometrissä seosta olevan kuparin paino on $0{,}5902 \cdot 8960$ kg, mikä on 64,4 % seoskuutiometrin painosta 8 210 kg.)

**5.** Esittää ympyrää, kun $a < -1$ tai $a > 3$.
Piste $(1, 2)$ on ympyrän sisällä, kun $a < -2$.
(Neliöksi täydentämällä yhtälö tulee muotoon $(x + a)^2 + y^2 = a^2 - 2a - 3$. Ratkaisemalla toisen asteen epäyhtälö (nollakohdat ja paraabelikuvio) nähdään, että oikea puoli on positiivinen, kun $a < -1$ tai $a > 3$.
Ympyrän keskipiste on $(-a, 0)$, joten piste $(1, 2)$ on ympyrän sisällä, kun $(1 + a)^2 + 2^2 < a^2 - 2a - 3$.)

**6.** Kaikki keskipisteet ovat suoralla $x = 1$.
(Suoran $y = 2x + b$ ja paraabelin $y = x^2$ leikkauspisteiden $x$-koordinaatit ratkaistaan toisen asteen yhtälöllä $x^2 - 2x - b = 0$. $x$-koordinaatit ovat $x = \frac{2 + \sqrt{4 + 4b}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{4 + 4b}}{2}$ ja $x = \frac{2 - \sqrt{4 + 4b}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{4 + 4b}}{2}$. Leikkauspisteiden $x$-koordinaattien keskiarvo on aina $1$, joten jokaisen keskipisteen $x$-koordinaatti on $1$.)

# Hakemisto


ellipsi . . . . . 147

etäisyys lukusuoralla . . . . . 14

etäisyys tasossa . . . . . 30

hyperbeli . . . . . 148

itseisarvo
- määritelmä . . . . . 11
- itseisarvon määrittäminen . . . . . 12

itseisarvoepäyhtälöt
$|f(x)| < a$ ja $|f(x)| > a$ . . . . . 26

itseisarvoyhtälöt
- yhtälö $|f(x)| = a$ . . . . . 22
- yhtälö $|f(x)| = |g(x)|$ . . . . . 26

janan keskipiste tasossa . . . . . 32

janan keskinormaali . . . . . 115

janan keskipiste lukusuoralla . . . . . 17

kartioleikkaukset . . . . . 149

kolmion merkilliset pisteet . . . . . 72

kolmion painopiste . . . . . 72

kompleksiluvut
- määritelmä ja nimityksiä . . . . . 140
- kompleksiluvun liittoluku . . . . . 141
- kompleksiluvun itseisarvo . . . . . 144
- kompleksilukujen etäisyys . . . . . 144

kompleksitaso . . . . . 140

kulmakerroin
- määritelmä . . . . . 58
- laskukaava . . . . . 68

lineaarinen yhtälöryhmä . . . . . 91

lineaarinen malli . . . . . 82

muuttujan eliminoiminen
- yhteenlaskumenetelmä . . . . . 92
- sijoitusmenetelmä . . . . . 94

napakoordinaatisto . . . . . 74

neliöksi täydentäminen . . . . . 49

normaali . . . . . 111

paraabeli
- määritelmä . . . . . 134
- yhtälö . . . . . 135

paraboloidi . . . . . 137

pisteen etäisyys suorasta . . . . . 122

pistejoukon yhtälö . . . . . 37

suoran yhtälö
- yhtälön muodostaminen . . . . . 74
- ratkaistu muoto $y = kx + b$ . . . . . 76
- $x$-akselin suuntainen suora . . . . . 78
- $y$-akselin suuntainen suora . . . . . 78
- yleinen muoto $Ax + By + C = 0$ . . . . . 85

suoraparvi . . . . . 89

suorien kohtisuoruusehto . . . . . 111

suorien yhdensuuntaisuusehto . . . . . 61

suunnattu kulma . . . . . 61

suuntakulma . . . . . 62

taksinkuljettajan etäisyys . . . . . 35

ympyrän tangentti
määrittäminen diskriminantin avulla . . 106
kehän pisteeseen piirretty tangentti . . . 119
määrittäminen etäisyyskaavan avulla 127

ympyrän yhtälö
keskipistemuotoinen yhtälö . . . . . 43
yhtälö $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. . . . . 52

ympyrän leikkauspisteitä
ympyrän ja suoran leikkauspisteet. . . . 103
kahden ympyrän leikkauspisteet . . . . . 104

ympyräparvi . . . . . 54